

الإحتمالات الشرطية

Kimou.

القوائم

تعريف : (Ω) مجموعة منتهية ذات $n \in \mathbb{N}^*$ عنصر حيث $p \in \mathbb{N}^*$ نسمي قائمة ذات p عنصر من المجموعة (Ω) كل متتالية مرتبة من p حد مأخوذ من المجموعة (Ω)

مثال : $(\Omega) = \{1; 2; 3\}$

قوائم المجموعة (Ω) ذات عنصرين هي

$\{(3; 3); (3; 2); (3; 1); (2; 3); (2; 2); (2; 1); (1; 3); (1; 2); (1; 1)\}$

ملاحظة : عدد القوائم ذات p عنصر من المجموعة ذات n عنصر هو n^p

مثلا : في المثال السابق عدد القوائم ذات عنصرين من المجموعة $\{1; 2; 3\}$ هو $3^2 = 9$ الترتيبية :

(Ω) مجموعة منتهية ذات $n \in \mathbb{N}^*$ عنصرا حيث $p \in \mathbb{N}^*$

كل قائمة ذات p عنصرا متمايضا متتى متتى من عناصر المجموعة (Ω) تسمى ترتيبية ذات p عنصرا من المجموعة (Ω)

و عددها هو A_n^p معرف كمايلي : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$

حالات خاصة :

إذا كان $p > n$ فإن $A_n^p = 0$

إذا كان $p = n$: $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ نرسم له بـ $n!$ و يقرأ "n عاملي" أو "مفكوك n"

في هذه الحالة كل ترتيبية تسمى أيضا تبديلة ذات n عنصر من المجموعة (Ω)

نشاط :

نريد ترتيب 8 أشخاص حول طاولة مستديرة
بكم طريقة مختلفة يمكن تحديد وضعية كل شخص ؟

الحل :

إذا اعتبرنا كل وضعية للجلوس هي قائمة ذات 8 عناصر من مجموعة الأشخاص ذات 8 عناصر فإن عدد هذه الوضعيات هو تبديلات لـ 8 عناصر من بين 8 عناصر لأن الأشخاص مختلفة متتى متتى . و عليه فعدد الوضعيات المختلفة للجلوس هو $8!$

التوفيقات :

(Ω) مجموعة منتهية ذات $n \in \mathbb{N}^*$ عنصرا حيث $p \in \mathbb{N}^*$ عدد طبيعي حيث $0 \leq p \leq n$

نسمي توفيق ذات p عنصر من عناصر المجموعة (Ω) كل جزء ذات p عنصر من المجموعة (Ω)

نرمز إلى عدد التوفيقات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر بالرمز C_n^p أو $\binom{n}{p}$ و نقرأ : توفيق ذات p عنصر من بين n عنصر .

نتائج : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$C_n^0 = 1$: يوجد جزء وحيد خالي

$C_n^n = 1$: يوجد جزء وحيد يحتوي على كل عناصر المجموعة (Ω) و هو (Ω)

إذا كان $0 \leq p \leq n$ فإن : $C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!}$

مثال :

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! (10-3)!} = \frac{10!}{3! 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$$

إذن : حسب دستور ثنائي الحد : $A = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

نشاط :

$$B = \sum_{k=0}^n \frac{3^{n-k}}{4^n} \times C_n^k$$

أحسب

الحل :

$$B = \sum_{k=0}^n \frac{3^{n-k}}{4^n} \times C_n^k$$

$$= \sum_{k=0}^n 3^{n-k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times C_n^k$$

$$B = \left(\frac{1}{4} + 3\right)^n = \left(\frac{13}{4}\right)^n$$

إذن : حسب دستور ثنائي الحد :

نمذجة تجربة عشوائية

عند القيام بتجربة عشوائية تكون مجموعة نتائجها الممكنة منتهية و قابلة للعد تسمى مخارج التجربة و نرمز لها

$$E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$$

نعرف على هذه المجموعة قانون احتمال p و هو كل متتالية عددية معرفة من المجموعة $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ نحو المجموعة

$$[0 ; 1] \text{ ترفق بعنصر } i \text{ العدد الحقيقي } p_i \text{ حيث } p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

كل عدد حقيقي p_i يسمى احتمال الحادثة x_i و نكتب $p(x_i) = p_i$

في حالة تساوي الاحتمال بين كل الحوادث فإن :

$$p_1 + p_1 + \dots + p_1 = 1 \quad \text{يكافئ} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_i = 1$$

$$n p_1 = 1 \quad \text{يكافئ}$$

$$p_1 = 1/n \quad \text{يكافئ}$$

مبرهنة : في حالة تساوي احتمال على مجموعة المخارج E فإن من أجل كل حادثة A

$$p(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}$$

مثلا : نسحب كرة واحدة من كيس فيه 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6

لتكن A الحادثة : سحب كرة رقمها مضاعف 3

إذا كان الاحتمال متساوي فإن : $p(A) = 2/6$ لأن :

$$E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\} \quad \text{إذن : عدد عناصر } E \text{ هو } 6$$

$$A = \{3 ; 6\} \quad \text{إذن : عدد عناصر } A \text{ هو } 2$$

خواص أساسية و مصطلحات الاحتمالات

E مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية .

A و B حادثتين (مجموعتين جزئيتين من المجموعة E)

p قانون احتمال معرف على المجموعة E

$$0 \leq p(A) \leq 1 \quad - 1$$

$$p(\phi) = 0 \quad \text{حادثة مستحيلة} . \quad - 2$$

$$p(E) = 1 \quad \text{حادثة أكيدة} . \quad - 3$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad \text{حادثتان كيفيتان} . \quad - 4$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad \text{حادثتان غير متلاصقتين} . \quad - 5$$

$$\bar{A} = E - A : \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A) \quad - 6$$

المتغير العشوائي

نسمي متغير عشوائي X كل دالة عددية معرفة على مجموعة الامكانيات E مزودة بقانون احتمال p حيث X يأخذ القيم

$$x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n \text{ بالاحتمالات } p_1 ; p_2 ; \dots ; p_n \text{ معرفا كإيلي : } p(X = x_i) = p_i$$

مثال : صندوق يحتوي على كرتين لا نفرق بينهما عند اللمس أحدهما ببيضاء B و الأخرى سوداء N نسحب 3 مرات كرة

واحدة مع إرجاعها بعد كل سحب إلى الصندوق .

إذن : المخارج الممكنة $E = \{BBB ; BBN ; BNB ; BNN ; NBB ; NBN ; NNB ; NNN\}$

ليكن سحب كرة بيضاء يؤدي إلى ربح 20 DA و سحب كرة سوداء يؤدي إلى خسارة 10 DA . نعرف المتغير العشوائي X

الذي يرفق بكل حادثة مجموع المبالغ الناتجة (ربح أو خسارة مثلا : BBN يؤدي إلى $X = 20 + 20 - 10$)

القيم الممكنة لـ X :

الحوادث	BBB	BBN	BNB	BNN	NBB	NBN	NNB	NNN
قيم X	60	30	30	0	30	0	0	-30

إن : X يأخذ القيم $\{-30; 0; 30; 60\}$ يكون $x = -30$ إذا فقط إذا كانت نتيجة التجربة NNNيكون $x = 0$ إذا فقط إذا كانت نتيجة التجربة BNN أو NBN أو NNBيكون $x = 30$ إذا فقط إذا كانت نتيجة التجربة BBN أو BNB أو NBBيكون $x = 60$ إذا فقط إذا كانت نتيجة التجربة BBB

$$p(X = -30) = 1/8$$

$$p(X = 0) = 3/8$$

$$p(X = 30) = 3/8$$

$$p(X = 60) = 1/8$$

إن : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو كما يلي :

X_i	-30	0	30	60
$p(X = X_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

الأمثلة الرياضية ، التباين

ليكن X متغير عشوائي يأخذ القيم $\{X_1; X_2; \dots; X_n\}$

$$p(X = X_i) = p_i$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^n X_k p(X = X_k)$$

$$Var(X) = \sum_{k=1}^n (X_k - E(X))^2 p(X = X_k)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

التفسير الفيزيائي

 $E(X)$ هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب عند القيام بالتجربة عدة مرات .و عليه فإن : إذا كان $E(X) = 0$ فإن اللعبة عادلةإذا كان $E(X) > 0$ فإن اللعبة مربحةإذا كان $E(X) < 0$ فإن اللعبة ليست في صالح اللاعب

مبرهنة

 X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الوضعيةعدد حقيقي ، $E(X)$ ، $E(Y)$ ، $E(X + Y)$ هي على الترتيب الأمل الرياضي للمتغيرات العشوائية X ، Y ، $X + Y$

$$E(aX) = aE(X) \text{ و } E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

نتج : X متغير عشوائي و a و b عدنان حقيقيان

$$E(b) = b \text{ لأن } E(X + b) = E(X) + b$$

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\sigma(aX) = |a| \sigma(X) \text{ و } Var(aX) = a^2 Var(X)$$

$$\sigma(X + b) = \sigma(X) \text{ و } Var(X + b) = Var(X)$$

(2) إثبات الخاصية

$$Var(X) = \sum_{k=1}^n (X_k - E(X))^2 p(X = X_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n [X_k^2 - 2X_k E(X) + E^2(X)] p(X = X_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n X_k^2 p(X = X_k) - 2E(X) \sum_{k=1}^n X_k p(X = X_k) + E^2(X) \sum_{k=1}^n p(X = X_k)$$

$$\sum_{k=1}^n p(X = X_k) = 1 \text{ لأن } = E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

الاحتمالات الشرطية

تعريف :

$p(A) \neq 0$ حيث A و B حادثتان حيث $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ حيث $p_A(B)$ احتمال وقوع الحادثة B علماً أن A محققة يسمى احتمال شرطي نرمز له بـ $p_A(B)$ حيث $p_A(B)$ احتمال الحادثة B علماً أن الحادثة A محققة ونقرأ :

مثال : نرمي زهرة نرد ذات 6 أوجه غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 لتكن A الحادثة النتيجة عدد فردي

B الحادثة النتيجة عدد مضاعف 3

لدينا : $p(A) = 3/6$ ؛ $p(B) = 2/6$ ؛ $p(A \cap B) = 1/6$ ؛

منه : احتمال الحصول على عدد مضاعف 3 علماً أن النتيجة عدد فردي هي $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$

تحقيق : إذا كانت النتيجة فردية فإن عدد الحالات الممكنة هي $\{1; 3; 5\}$

من بين هذه الحالات العدد 3 فقط مضاعف 3 إذن : $p_A(B) = 1/3$

تطبيق :

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الصندوق كرتين على التوالي دون ارجاع

لتكن A الحادثة : الكرة الأولى حمراء

B الحادثة : الكرة الثانية خضراء

أحسب $p(A)$ ؛ $p_A(B)$ ثم استنتج $p(A \cap B)$

الحل :

عدد الحالات الممكنة هو $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

لتكن R كرة حمراء و V كرة خضراء

الحادثة A توافق الحالات التالية : RR أو RV

إذن : عدد هذه الحالات هو $6 \times 3 + A_6^2 = 18 + 30 = 48$

نتيجة : $p(A) = \frac{48}{72} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

الحادثة B علماً أن A محققة توافق الحالات RV من بين RV و RR

إذن : عدد هذه الحالات هو $6 \times 3 = 18$ من بين $18 + 30 = 48$

نتيجة : $p_A(B) = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$

خلاصة : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ منه : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

أي : $p(A \cap B) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

تحقيق : الحادثة $(A \cap B)$ توافق الحالات RV وعددها $6 \times 3 = 18$

منه : $p(A \cap B) = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}$

الحوادث المستقلة :

تعريف : نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتين إذا و فقط إذا كان $p(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(أي إذا كان $p(A) \neq 0$ فإن $p_A(B) = P(B)$)

المتغيرات العشوائية المستقلة

X و Y متغيران عشوائيان على نفس الفضاء الاحتمالي E

لتكن $X_1; X_2; \dots; X_n$ قيم المتغير العشوائي X

و $Y_1; Y_2; \dots; Y_m$ قيم المتغير العشوائي Y

تعريف :

نقول أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان إذا و فقط إذا كانت الحادثتان $X = X_i$ و $Y = Y_j$ مستقلتان من أجل كل

$1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$

ملاحظة : إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مرتبطين بتجربتين مختلفتين فإنهما حتماً مستقلان
نشاط :

نرمي ثلاث مرات متتالية قطعة نقدية غير مزيفة ذات وجه و ظهر
نرمز بـ X لعدد مرات ظهور الوجه في الرمية الأولى
نرمز بـ Y لعدد مرات ظهور الوجه في الرميتين الثانية و الثالثة
تحقق أن X و Y هما متغيران عشوائيان مستقلان .

الحل :

نرمز إلى الوجه بـ F و الظهر بـ P

إذن : مجموعة الامكانيات للتجربة هي كما يلي :

$$E = \{PPF ; PPP ; PFF ; FFP ; FFF ; FFP ; FPF ; FPP\}$$

الوجه إما يظهر مرة واحدة في الرمية الأولى أو لا يظهر إطلاقاً .

إذن : قيم المتغير العشوائي X هي $\{0 ; 1\}$

الوجه إما لا يظهر في كلا من الرميتين الثانية و الثالثة أو يظهر مرة واحدة فقط إما في الثانية أو الثالثة أو يظهر في كلا من

الثانية و الثالثة إذن : المتغير العشوائي Y يأخذ القيم $\{0 ; 1 ; 2\}$

الحادثة	الحالات الملائمة للحادثة	احتمال الحادثة
$X = 0$	PPF ; PPP ; PFF ; FFP	$4/8 = 1/2$
$X = 1$	FFF ; FFP ; FPF ; FPP	$4/8 = 1/2$
$Y = 0$	PPP ; FPP	$2/8 = 1/4$
$Y = 1$	PPF ; PFP ; FFP ; FPF	$4/8 = 1/2$
$Y = 2$	FFF ; PFF	$2/8 = 1/4$

من جهة أخرى لدينا الاحتمالات التالية :

الحادثة	الحالات الملائمة	احتمال الحادثة
$X = 0$ و $Y = 0$	PPP	$1/8$
$X = 0$ و $Y = 1$	FPP ; PPF	$2/8 = 1/4$
$X = 0$ و $Y = 2$	PFF	$1/8$
$X = 1$ و $Y = 0$	FPP	$1/8$
$X = 1$ و $Y = 1$	FFP ; FPF	$2/8 = 1/4$
$X = 1$ و $Y = 2$	FFF	$1/8$

مقارنة :

$$p(X = 0) \times p(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 0 ; Y = 0)$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(X = 0 ; Y = 1)$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 0 ; Y = 2)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 1 ; Y = 0)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(X = 1 ; Y = 1)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 1 ; Y = 2)$$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0 ; 1\}$ من أجل كل $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$ لدينا :

$$p(X = i) \times p(Y = k) = p(X = i ; Y = k)$$

إذن : الحوادث X_i و Y_k مستقلة متتى متتى .

منه : المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1

يحتوي صندوق على 32 كرة لا نفرق بينها عند اللمس .
نسحب من الصندوق 8 كرات عشوائيا . أحسب عدد الحالات الممكنة للسحب

الحل 1

لحساب عدد الحالات الممكنة للسحب نميز بين ثلاث أنواع من السحب كمايلي :

- (a) سحب في آن واحد : إذن كل سحب هو توفيقه لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو C_{32}^8
(b) سحب على التوالي دون ارجاع : إذن كل سحب هو ترتيبية لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو A_{32}^8

- (c) سحب على التوالي بارجاع : إذن كل سحب هو قائمة لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو $(32)^8$

التمرين 2

أحسب ماييلي :

$$A = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{2^k} \quad (a) \quad B = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{3^{n-k}}{4^k} \quad (b)$$

الحل 2

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \times (1)^{n-k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (a)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$A = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{إذن :}$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \frac{3^{n-k}}{4^k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \times 3^{n-k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \quad (b)$$

$$= \left(3 + \frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{13}{4}\right)^n$$

$$B = \left(\frac{13}{4}\right)^n \quad \text{منه :}$$

التمرين 3

يحتوي صندوق A على 3 كرات حمراء ؛ 3 كرات سوداء ؛ 5 كرات خضراء

يحتوي صندوق B على 7 كرات حمراء ؛ 4 كرات سوداء ؛ 2 كرات خضراء

جميع الكرات متساوية الاحتمال في السحب

نسحب كرة من الصندوق A ثم كرة من الصندوق B

لتكن الحوادث التالية : V : سحب كرة خضراء من الصندوق A

B : سحب كرة خضراء من الصندوق B

N : سحب كرة سوداء من الصندوق B

R : سحب كرة حمراء من الصندوق B

1 - أحسب $p(R)$ ؛ $p(N)$ ؛ $p(V')$ ؛ $p(V)$

2 - أحسب احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B

الحل - 3

- 1 - عدد الكرات الخضراء في الصندوق A هو 5 إذن : $p(V) = 5/11$
 عدد الكرات الخضراء في الصندوق B هو 2 إذن : $p(V') = 2/13$
 عدد الكرات السوداء في الصندوق B هو 4 إذن : $p(N) = 4/13$
 عدد الكرات الحمراء في الصندوق B هو 7 إذن : $p(R) = 7/13$

2 - احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B هو $p(V) \times p(V') = \frac{5}{11} \times \frac{2}{13}$

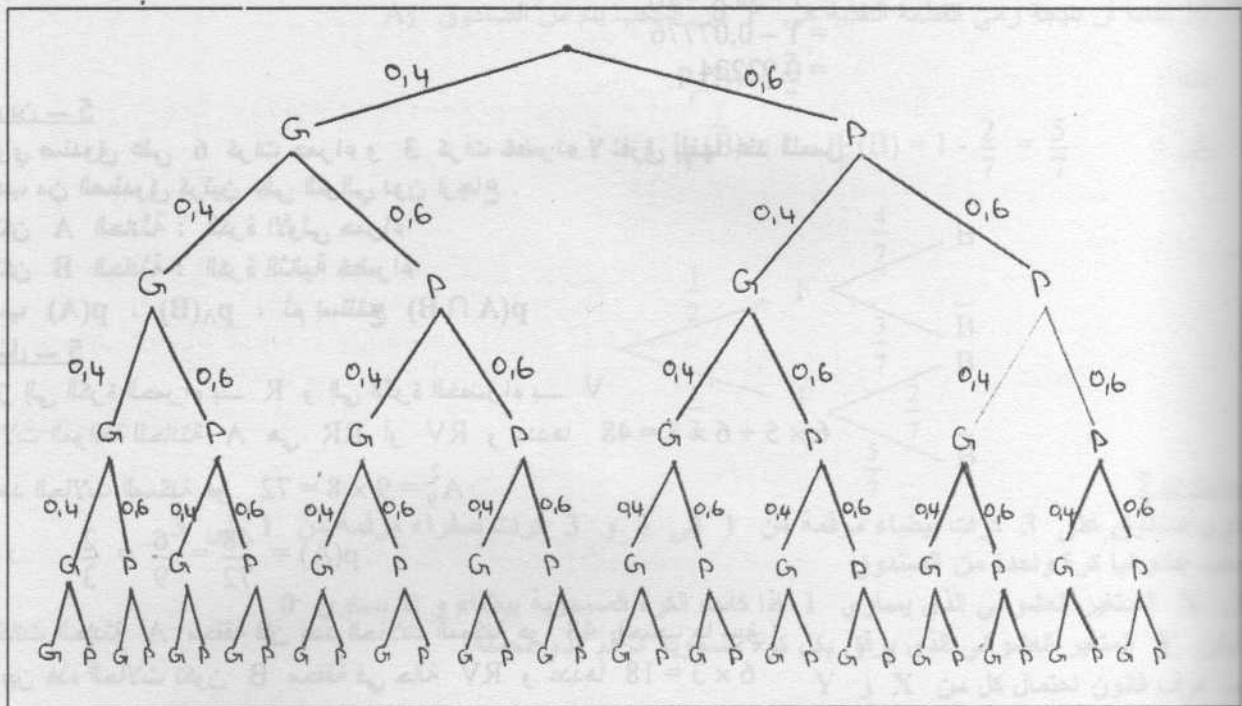
تمرين - 4

يشارك رشيد في لعبة حظ حيث احتمال الفشل فيها هو 0,6 . قرر رشيد المحاولة 5 مرات متتالية . نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل 5 محاولات عدد مرات الفوز

- 1 - عرف قانون الاحتمال للمتغير X
 2 - أوجد الأمل الرياضي و الانحراف المعياري لـ X
 3 - ما هو احتمال الحادثتين : A : دوما يفشل في المحاولات الخمسة
 B : يفوز مرة واحدة على الأقل

الحل - 4

نرمز إلى حالة الفوز بـ G و إلى حالة الفشل بـ P
 تمثل الحالات الممكنة على شكل شجرة كما يلي :



1 - X هو عدد مرات الفوز إذن : X يأخذ القيم {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} منه الجدول التالي :

الحالات الملائمة للحادثة	الحادثة
PPPPP	X = 0
GPPPP ; PGPPP ; PPGPP ; PPPGP ; PPPPG	X = 1
GPPPG ; GPPGP ; GPGPP ; GGPPP ; PGGPP ; PGPGP ; PGPPG ; PPGGP ; PPGPG ; PPPGG	X = 2
GGGPP ; GGPGP ; GGPPG ; GPGGP ; GPGPG ; GPPGG ; PGGGP ; PGPGG ; PPGGG ; PGGPG	X = 3
GGGGP ; GGGPG ; GGPGG ; GPGGG ; PGGGG	X = 4
GGGGG	X = 5

في كل مرة لدينا : $p(P) = 0,6$ و $p(G) = 0,4$
منه : النتائج التالية :

$$\begin{aligned} p(X=0) &= (0,6)^5 = 0,07776 \\ p(X=1) &= 5 \times [(0,6)^4 \times (0,4)] = 0,2592 \\ p(X=2) &= 10 \times [(0,6)^3 \times (0,4)^2] = 0,3456 \\ p(X=3) &= 10 \times [(0,6)^2 \times (0,4)^3] = 0,2304 \\ p(X=4) &= 5 \times [(0,6) \times (0,4)^4] = 0,0768 \\ p(X=5) &= (0,4)^5 = 0,01024 \end{aligned}$$

منه قانون المتغير العشوائي X كمايلي :

X_i	0	1	2	3	4	5
$p(X=X_i)$	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

$$E(X) = 0 \times (0,07776) + 1(0,2592) + 2(0,3456) + 3(0,2304) + 4(0,0768) + 5(0,01024) = 2 \quad - 2$$

$$Var(X) = 0 \times (2 - 0,07776)^2 + 1(2 - 0,2592)^2 + 2(2 - 0,3456)^2 + 3(2 - 0,2304)^2 + 4(2 - 0,0768)^2 + 5(2 - 0,01024)^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

$$p(A) = P(X=0) = 0,07776 \quad - 3$$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) \\ &= 1 - p(X=0) \\ &= 1 - 0,07776 \\ &= 0,92224 \end{aligned}$$

التمرين 5

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس
نسحب من الصندوق كرتين على التوالي دون ارجاع .

لتكن A الحادثة : الكرة الأولى حمراء

و لتكن B الحادثة : الكرة الثانية خضراء

أحسب $p(A)$ ، $p_A(B)$ ، ثم استنتج $p(A \cap B)$

الحل 5

نرمز إلى الكرة الحمراء بـ R و إلى الكرة الخضراء بـ V

الحالات الموافقة للحادثة A هي RR أو RV و عددها $6 \times 5 + 6 \times 3 = 48$

و عدد الحالات الممكنة هو $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

$$p(A) = \frac{48}{72} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{إذن :}$$

إذا كانت الحادثة A محققة فإن عدد الحالات الممكنة هو 48 (حسب ما سبق)

من بين هذه الحالات تكون B محققة في حالة RV و عددها $6 \times 3 = 18$

$$p_A(B) = \frac{18}{48} = \frac{3}{8} \quad \text{إذن :}$$

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) \quad \text{منه :} \quad p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{نتيجة :}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{4}$$

التمرين 6

يحتوي صندوق A_1 على 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء

و يحتوي صندوق A_2 على 2 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء

كل الكرات متساوية الاحتمال و لا نفرق بينها عند اللمس

نرمي قطعة نقدية غير مزيفة . إذا ظهر الوجه نسحب عشوائيا كرة من الصندوق

A_1 أما إذا ظهر "ظهر" نسحب كرة من الصندوق A_2

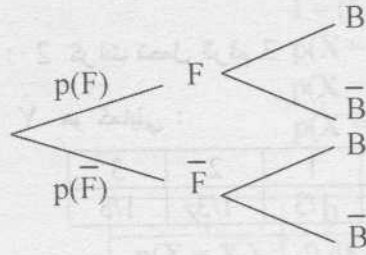
نسمي F الحادثة "ظهور وجه" و B الحادثة "الكرة المسحوبة بيضاء"

1 - أحسب $P(F)$ ؛ $P(\bar{F})$

2 - أحسب $P_F(B)$ ثم استنتج $P_F(\bar{B})$

3 - أحسب $P_{\bar{F}}(B)$ ثم استنتج $P_{\bar{F}}(\bar{B})$

4 - أكمل الشجرة التالية بالنتائج المحصل عليها :



الحل - 6

1 - القطعة النقدية ليست مزيفة إذن : ظهور وجه أو ظهر لهما نفس الاحتمال

أي : $P(F) = 1/2$ و $P(\bar{F}) = 1/2$

2 - إذا علمت أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي F فإن السحب يتم من الصندوق A_1

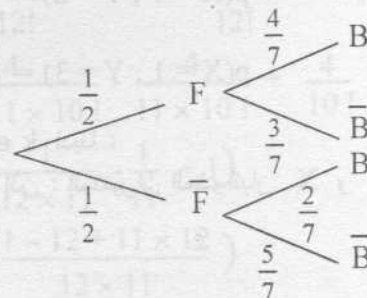
منه : $P_F(B) = \frac{4}{7}$

إذن : $P_F(\bar{B}) = 1 - P_F(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

3 - إذا علمنا أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي $\bar{F}$ فإن السحب يتم من الصندوق A_2

منه : $P_{\bar{F}}(B) = \frac{2}{7}$

إذن : $P_{\bar{F}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{F}}(B) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$



تمرين - 7

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 و 3 كرات صفراء مرقمة من 1 إلى 3 .
تسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق

ليكن X التمتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء و إلا يساوي 0

و ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة مسحوبة الرقم الذي تحمله

1 - عرف قانون احتمال كل من X و Y

2 - أحسب الأمل الرياضي لكل من X و Y

3 - برهن أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X.Y و أحسب أمله الرياضي

الحل - 7

1 - يأخذ القيم $\{0; 1\}$

$$p(X=0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad p(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

منه : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

X_i	0	1
$p(X = X_i)$	1/2	1/2

Y يأخذ القيم $\{1; 2; 3\}$

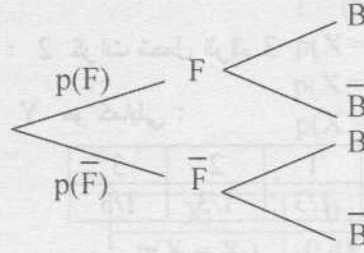
تسمى F الحادثة "ظهور وجه" و B الحادثة " الكرة المسحوبة بيضاء "

1 - أحسب $P(F)$ ؛ $P(\bar{F})$

2 - أحسب $P_F(B)$ ثم استنتج $P_F(\bar{B})$

3 - أحسب $P_{\bar{F}}(B)$ ثم استنتج $P_{\bar{F}}(\bar{B})$

4 - أكمل الشجرة التالية بالنتائج المحصل عليها :



الحل - 6

1 - القطعة النقدية ليست مزيفة إذن : ظهور وجه أو ظهر لهما نفس الاحتمال

أي : $P(F) = 1/2$ و $P(\bar{F}) = 1/2$

2 - إذا علمت أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي F فإن السحب يتم من الصندوق A_1

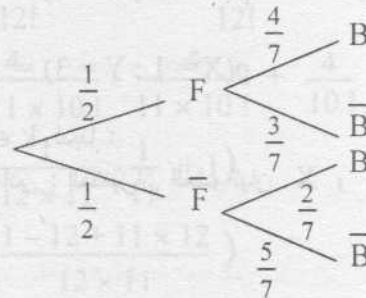
$$P_F(B) = \frac{4}{7} \quad \text{منه :}$$

$$P_F(\bar{B}) = 1 - P_F(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \quad \text{إذن :}$$

3 - إذا علمنا أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي $\bar{F}$ فإن السحب يتم من الصندوق A_2

$$P_{\bar{F}}(B) = \frac{2}{7} \quad \text{منه :}$$

$$P_{\bar{F}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{F}}(B) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \quad \text{إذن :}$$



تمرين - 7

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 و 3 كرات صفراء مرقمة من 1 إلى 3 .
تسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق

ليكن X التمتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء وإلا يساوي 0
وليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة مسحوبة الرقم الذي تحمله

1 - عرف قانون احتمال كل من X و Y

2 - أحسب الأمل الرياضي لكل من X و Y

3 - برهن أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X.Y و أحسب أمله الرياضي

الحل - 7

1 - X يأخذ القيم $\{0; 1\}$

$$p(X=0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad p(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

منه : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

X_i	0	1
$p(X=X_i)$	1/2	1/2

Y يأخذ القيم $\{1; 2; 3\}$

$$p(Y=1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad 2 \text{ كرات تحمل الرقم 1}$$

$$p(Y=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad 2 \text{ كرات تحمل الرقم 2}$$

$$p(Y=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad 2 \text{ كرات تحمل الرقم 3}$$

منه : قانون احتمال المتغير Y هو كمايلي :

Y_i	1	2	3
$p(Y=Y_i)$	1/3	1/3	1/3

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad -2$$

$$E(Y) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$p(X=0; Y=1) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=0) \times p(Y=1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \quad -3$$

$$p(X=0; Y=2) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=0) \times p(Y=2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$p(X=0; Y=3) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=0) \times p(Y=3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$p(X=1; Y=1) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=1) \times p(Y=1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$p(X=1; Y=2) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=1) \times p(Y=2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$p(X=1; Y=3) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=1) \times p(Y=3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0; 1\}$ و من أجل كل $k \in \{1; 2; 3\}$ لدينا :

$p(X=X_i; Y=Y_k) = p(X=X_i) \times p(Y=Y_k)$ إذن : المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 - القيم الممكنة للمتغير العشوائي XY هي $\{0; 1; 2; 3\}$

$$p(XY=0) = p(X=0) = \frac{1}{2}$$

$$p(XY=1) = p(X=1; Y=1) = \frac{1}{6}$$

$$p(XY=2) = p(X=1; Y=2) = \frac{1}{6}$$

$$p(XY=3) = p(X=1; Y=3) = \frac{1}{6}$$

منه قانون المتغير العشوائي XY كمايلي :

α_i	0	1	2	3
$p(XY=\alpha_i)$	1/2	1/6	1/6	1/6

$$E(XY) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1+2+3}{6} = 1$$

التمرين 8 -

نرمي زهرة نرد غير متوازنة مرة واحدة

ليكن X العلامة المحددة كمايلي :

(a) العلامة (-10) إذا ظهر الرقم 1

(b) العلامة (10) إذا ظهر الرقم 6

(c) العلامة (0) في الحالات الأخرى

نفرض أن احتمال ظهور الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هو 0,12
عرف قانون احتمال العدد X

الحل - 8

احتمال ظهور الرقم 6 هو $1 - (5 \times 0,12) = 1 - 0,6 = 0,4$

$$p(X = -10) = 0,12$$

$$p(X = 10) = 0,4$$

$$p(X = 0) = 4 \times 0,12 = 0,48$$

منه قانون الاحتمال للعدد X هو كمايلي :

X_i	0	-10	10
$p(X = X_i)$	0,48	0,12	0,4

تمرين - 9

بسط الأعداد التالية :

$$(a) \frac{8!}{6!}$$

$$(b) \frac{11!}{9! \times 2!}$$

$$(c) \frac{13! - 12!}{12!}$$

$$(d) \frac{4}{12!} - \frac{4}{11!} + \frac{4}{10!}$$

الحل - 9

$$(a) \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$$

$$(b) \frac{11!}{9! \times 2!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9! \times 2 \times 1} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

$$(c) \frac{13! - 12!}{12!} = \frac{13 \times 12! - 12!}{12!} = \frac{12! (13 - 1)}{12!} = 13 - 1 = 12$$

$$(d) \frac{4}{12!} - \frac{4}{11!} + \frac{4}{10!} = \frac{4}{12 \times 11 \times 10!} - \frac{4}{11 \times 10!} + \frac{4}{10!}$$

$$= \frac{4}{10!} \left(\frac{1}{12 \times 11} - \frac{1}{11} + 1 \right)$$

$$= \frac{4}{10!} \left(\frac{1 - 12 + 11 \times 12}{12 \times 11} \right)$$

$$= \frac{4}{10!} \left(\frac{121}{12 \times 11} \right)$$

$$= \frac{4}{10!} \left(\frac{11 \times 11}{12 \times 11} \right)$$

$$= \frac{11}{10! \times 3}$$

تمرين - 10

■ عدد طبيعي غير معدوم . بسط العبارات التالية :

$$(a) \frac{n!}{(n+1)!} \quad (c) \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$(b) \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \quad (d) \frac{n!}{n} - (n-1)!$$

الحل - 10

$$(a) \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$$

$$(b) \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!} = 2n(2n+1) = 4n^2 + 2n$$

$$\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n)}{(n+1)(n)(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} \quad (c)$$

$$\frac{n!}{n} - (n-1)! = \frac{n! - n(n-1)!}{n} = \frac{n! - n!}{n!} = 0 \quad (d)$$

التمرين 11أكتب العبارات التالية باستعمال العامل ($!$)

$$5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \quad (a)$$

$$n(n-1)(n-2) \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي أكبر من } 2 \quad (b)$$

$$\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7} \quad (c)$$

الحل 11

$$5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{4!} \quad (a)$$

$$n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!} \quad (b)$$

$$\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7} = \frac{12!}{7!} = \frac{12!}{8!} \times \frac{4!}{7!} \quad (c)$$

التمرين 12

1 - بكم طريقة يمكن اختيار تلميذين من بين 26 تلميذ

2 - بكم طريقة يمكن اختيار مسؤول عنهم ثم نائب لهذا المسؤول

الحل 12

1 - اختيار تلميذين من بين 26 هو توفيق لعنصرين من بين 26 عنصر و عددها إذن :

$$C_{26}^2 = \frac{26!}{24! \times 2!} = \frac{26 \times 25 \times 24!}{24! \times 2} = 25 \times 13$$

2 - اختيار مسؤول ثم نائب له هو ترتيب لعنصرين من بين 26 عنصر و عددها $A_{26}^2 = 26 \times 25$ **التمرين 13**

في لعبة الرهان الرياضي يختار المشارك 6 أرقام من بين 49 رقما (كرات مرقمة من 1 إلى 49)

1 - ما هو عدد الحالات الممكنة ؟

2 - استنتج احتمال فوز المشارك بسحب 6 أرقام صحيحة .

الحل 13

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{43! \times 6!} = \frac{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49}{6!} \quad 1 - \text{عدد الحالات الممكنة هو}$$

2 - من بين الحالات الممكنة يوجد حالة واحدة فقط تحمل 6 أرقام صحيحة .

$$\frac{1}{C_{49}^6} = \frac{1}{\frac{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49}{6!}} \quad \text{إذن : الاحتمال المطلوب هو :}$$

التمرين 14

يحتوي صندوق على 10 كرات موزعة كمايلي : 4 كرات سوداء و 6 كرات بيضاء

نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد . فما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على :

(a) كرة بيضاء (b) كرة بيضاء على الأقل

(c) 3 كرات ليست من نفس اللون

نضيف إلى هذا الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون1 - أثبت أن من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = (n+4)^2(n+6)$ 2 - كم نضيف من كرة سوداء و بيضاء حتى يكون $X_n = 2016$

الحل - 14

(a) سحب كرة بيضاء هي الحادثة : كرة بيضاء و كرتين سوداوين

$$C_6^1 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36 \quad \text{منه الحالات الممكنة هو}$$

(b) سحب كرة بيضاء على الأقل هو عدد كل الحالات الممكنة ماعدا الحالات التي تكون فيها كل الكرات سوداء إذن عددها هو :

$$C_{10}^3 - C_4^3 = \frac{10!}{7! \times 3!} - \frac{4!}{1! \times 3!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{3 \times 2} - 4 = 120 - 4 = 116$$

(c) لا يمكن سحب 3 كرات ليست من نفس اللون . لأن الألوان المختلفة المتوفرة هي الأسود و الأبيض فقط .
1 - بعد اضافة n كرة سوداء و n كرة بيضاء تصبح الوضعية كمايلي : (n+4) كرات سوداء ؛ (n+6) كرات بيضاء

سحب كرتين من نفس اللون أي } إما كرتين سوداوين و كرة بيضاء
أو كرتين بيضاوين و كرة سوداء

$$X_n = C_{n+4}^2 \times C_{n+6}^1 + C_{n+6}^2 \times C_{n+4}^1 \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{(n+4)!}{(n+4-2)! \times 2!} \times (n+6) + \frac{(n+6)!}{(n+6-2)! \times 2!} \times (n+4)$$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)!(n+6)}{(n+2)! \times 2} + \frac{(n+6)(n+5)(n+4)!(n+4)}{(n+4)! \times 2}$$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+6)}{2} + \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{2}$$

$$= \frac{(n+4)(n+6)}{2} (n+3+n+5)$$

$$= \frac{(n+4)(n+6)(2n+8)}{2}$$

$$= (n+4)(n+6)(n+4)$$

$$= (n+4)^2 (n+6)$$

$$X_n = 2016 \quad \text{يكفي} \quad (n+4)^2 (n+6) = 2016 \quad \text{2 -}$$

لنحلل العدد 2016 كما يلي :

$$\text{منه :} \quad 2016 = 3^2 \times 2^5 \times 7$$

$$= 3^2 \times 2^4 \times 2 \times 7$$

$$= 3^2 \times 4^2 \times 14$$

$$= (3 \times 4)^2 \times 14$$

$$= (8+4)^2 \times (8+6)$$

بالمطابقة مع عبارة $X_n = (n+4)^2 (n+6)$ نحصل على $n = 8$

إذن : يكفي اضافة 8 كرات بيضاء و 8 كرات سوداء

تمرين - 15

يحتوي صندوق على 15 كرات موزعة كمايلي :

6 بيضاء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3

5 خضراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2

4 حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 3 ، 3 ، 3

تسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد .

أحسب عدد الحالات الملائمة للحوادث التالية :

(A) سحب 3 كرات من نفس اللون .

(B) سحب 3 كرات تحمل نفس الرقم

(C) سحب 3 كرات مجموع أرقامها 6

(D) سحب أحد الأرقام الفردية على الأقل .

الحل - 15

(A) الحادثة 3 كرات من نفس اللون توافق الحادثة 3 كرات بيضاء أو 3 كرات خضراء أو 3 كرات حمراء
إذن : عدد الحالات الملائمة هو :

$$C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 = \frac{6!}{3!3!} + \frac{5!}{3!2!} + 4 = 20 + 10 + 4 = 34$$

(B) الحادثة 3 كرات تحمل نفس الرقم توافق الحادثة 3 كرات تحمل الرقم 1 أو 3 كرات تحمل الرقم 2 أو 3 كرات تحمل الرقم 3
إذن : عدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي :

$$C_6^3 + C_4^3 + C_5^3 = 20 + 4 + 10 = 34$$

(C) الحادثة 3 كرات مجموع أرقامها 6 توافق الحادثة : سحب الأرقام {3; 2; 1} أو {2; 2; 2} منه عدد الحالات

$$C_6^1 \times C_4^1 \times C_5^1 + C_4^3 = 6 \times 4 \times 5 + \frac{4!}{3!} = 120 + 4 = 124$$

(D) الحادثة "أحد الأرقام على الأقل فردي" توافق الحادثة العكسية للحادثة سحب كل الأرقام زوجية منه عدد الحالات الملائمة

$$C_{15}^3 - C_4^3 = \frac{15!}{12!3!} - \frac{4!}{3!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} - 4 = 485 - 4 = 481$$

التمرين - 16

يتنافس 10 لاعبين في دورة كرة تنس الطاولة بكم طريقة مختلفة يمكن تنظيم الدور الأول (5 مباريات)

الحل - 16

نرقم اللاعبين من 1 إلى 10 و نوزعهم على شكل ثنائيات للتنافس كمايلي : (2; 1) ؛ (4; 3) ؛ (6; 5) ؛ (8; 7) ؛ (10; 9)

اللاعب الأول يمكن أن يتنافس مع 9 لاعبين (ماعدًا نفسه)

اللاعب الثالث يمكن أن يتنافس مع 7 لاعبين (ماعدًا نفسه و اللاعبين السابقين)

اللاعب الخامس يمكن أن يتنافس مع 5 لاعبين (ماعدًا نفسه و اللاعبين الأربعة الأوائل)

اللاعب السابع يمكن أن يتنافس مع 3 لاعبين (ماعدًا نفسه و اللاعبين الستة الأوائل)

اللاعب التاسع يمكن أن يتنافس مع لاعب واحد فقط (ماعدًا نفسه و 8 لاعبين الأوائل)

نتيجة : يمكن اختيار مباريات الدورة الأولى بـ $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9$ طريقة مختلفة أي 945 طريقة مختلفة .

مثال : في حالة أربعة لاعبين فقط نحصل على عدد الطرق المختلفة هو : $3 \times 1 = 3$ كمايلي :

الطريقة الأولى : A ينافس B و C ينافس D

الطريقة الثانية : A ينافس C و B ينافس D

الطريقة الثالثة : A ينافس D و B ينافس C

التمرين - 17

من بين 5 جزائريين و 10 سعوديين و 10 فلسطينيين نختار 3 شخصيات من جنسيات مختلفة فما هو عدد الثلاثيات الممكنة ؟

الحل - 17

الأشخاص من جنسيات مختلفة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $C_5^1 \times C_{10}^1 \times C_{10}^1 = 5 \times 10 \times 10 = 500$

التمرين - 18

يحتوي صندوق على 49 كرية مرقمة من 1 إلى 49 منها 6 كرات حمراء و 43 كرات بيضاء .

نسحب في آن واحد 6 كرات .

1 - ما هو عدد الحالات الممكنة

2 - ما هو عدد الحالات الملائمة للحصول على 3 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء

الحل - 18

1 - سحب في آن واحد إذن : الحالات الممكنة هي توفيقات لـ 6 عناصر من بين 49 عنصر و عددها

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{43! \times 6!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6!}$$

2 - سحب 3 كرات حمراء من بين 6 و 3 كرات بيضاء من بين 43 :

$$C_6^3 \times C_{43}^3 = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{43!}{40! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} \times \frac{43 \times 42 \times 41}{3 \times 2} = 20 \times 43 \times 7 \times 41$$

التمرين - 19

تضع بين يدي طفل ثلاث أقلام ملونة أخضر ، أحمر ، أصفر . نطلب من الطفل تلوين الأوجه الستة لعبعة مكعبة الشكل .
بكم طريقة مختلفة يمكن التلوين ؟

الحل - 19

توزيع الألوان على الأوجه الستة هو قوائم ذات 6 عناصر من بين 3 عناصر حيث يمكن استعمال لون واحد للأوجه الستة معا منه عدد الطرق المختلفة هو $3^6 = 729$

التمرين - 20

يتكون قسم من 18 تلميذ و 12 تلميذة

تريد تشكيل لجنة مكونة من رئيس ، نائب ، أمين (3 أشخاص مختلفة)

1 - ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها

2 - ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في الحالات التالية :

(A) الأمين تلميذة

(B) التلميذ X موجود في اللجنة

(C) الرئيس تلميذ و الأمين تلميذة

(D) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين

الحل - 20

1 - عدد اللجان هو تراتيب لـ 3 عناصر من بين 30 عنصر و عددها $A_{30}^3 = 30 \times 29 \times 28$

2 - لتكن اللجنة مكونة كمايلي :

P	V	S
---	---	---

أمين نائب رئيس

(A) الأمين تلميذة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $12 \times A_{29}^2 = 29 \times 28 \times 12$

(B) التلميذ X موجود في اللجنة : هي الحادثة العكسية للحادثة التلميذ X غير موجود في اللجنة إذن : عدد الحالات الممكنة

$$\text{هو : } A_{30}^3 - A_{29}^3 = 30 \times 29 \times 28 - 29 \times 28 \times 27 = 29 \times 28 \times 3$$

(C) الرئيس تلميذ و الأمين تلميذة : عدد الحالات الممكنة هو : $18 \times 28 \times 12$

(D) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين إذن :

{ إما الرئيس تلميذ و النائب تلميذة

{ أو الرئيس تلميذة و النائب تلميذ

$$\text{منه عدد الحالات الممكنة : } 18 \times 12 \times 28 + 12 \times 18 \times 28 = 2 \times 12 \times 18 \times 28$$

التمرين - 21

وجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية :

$$C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n \quad (c) \quad C_n^3 = 56 \quad (a)$$

$$9 C_n^2 = 2 C_{2n}^2 \quad (b)$$

الحل - 21

$$\begin{cases} n \geq 3 \\ \frac{n!}{(n-3)! 3!} = 56 \dots\dots\dots (1) \end{cases} \quad C_n^3 = 56 \quad \text{يكافئ} \quad (a)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 56 \quad \text{تكافئ} \quad (1)$$

$$n(n-1)(n-2) = 56 \times 3! \quad \text{تكافئ}$$

$$n(n-1)(n-2) = 8 \times 7 \times 6 \quad \text{تكافئ}$$

$$n = 8 \quad \text{تكافئ}$$

نتيجة : $8 > 3$ إذن : $C_n^3 = 56$ من أجل $n = 8$

$$\begin{cases} n \geq 2 ; 2n \geq 2 \\ 9 \times \frac{n!}{(n-2)! 2!} = 2 \times \frac{(2n)!}{(2n-2)! 2!} \dots\dots\dots (1) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad 9 C_n^2 = 2 C_{2n}^2 \quad (b)$$

$$\frac{9 \times n!}{(n-2)!} = \frac{2 \times (2n)!}{(2n-2)!} \quad \text{تكافئ} \quad (1)$$

$$9 \times n(n-1) = 2 \times 2n(2n-1) \quad \text{تكافئ}$$

$$9n^2 - 9n = 8n^2 - 4n \quad \text{تكافئ}$$

$$n^2 - 5n = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} n=0 \text{ مرفوض لأن } 2n \geq 2 \\ \text{أو} \\ n=5 \text{ مقبول} \end{array} \right\} \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{نتيجة : } 9 C_n^2 = 2 C_{2n}^2 \text{ من أجل } n=5$$

$$\begin{cases} n \geq 3 ; 2n \geq 2 \\ \frac{n!}{(n-3)! 3!} + \frac{(2n)!}{(2n-2)! 2!} = 8n \dots\dots\dots (1) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n \quad (c)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2} + \frac{2n(2n-1)}{2} = 8n \quad \text{تكافئ} \quad (1)$$

$$n(n-1)(n-2) + 3 \times 2n(2n-1) = 6 \times 8n \quad \text{تكافئ}$$

$$n(n^2 - 3n + 2) + 12n^2 - 6n = 48n \quad \text{تكافئ}$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n + 12n^2 - 6n - 48n = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$n^3 + 9n^2 - 52n = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$n(n^2 + 9n - 52) = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$n \neq 0 \quad \text{لأن } n^2 + 9n - 52 = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\Delta = 81 + 208 = 289 = (17)^2$$

$$n_1 = \frac{-9-17}{2} = -8 \quad \text{مرفوض}$$

$$n_2 = \frac{-9+17}{2} = 4 \quad \text{مقبول}$$

$$\text{نتيجة : } C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n \text{ من أجل } n=4$$

التمرين 22

n و m عدنان طبيعيين حيث $n \geq 2$ و $n-2 \geq m$

أثبت صحة المساواة التالية :

$$C_{2n}^n = 2 C_{2n-1}^{n-1} \quad - 1$$

$$C_n^m = C_{n-2}^{m-2} + 2 C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m \quad - 2$$

الحل - 22

$$2 C_{2n-1}^{n-1} = 2 \times \frac{(2n-1)!}{(2n-1-n+1)! (n-1)!} \quad - 1$$

$$= 2 \times \frac{(2n-1)!}{n! (n-1)!}$$

$$= 2 \times \frac{(2n-1)!}{n! (n-1)!} \times \frac{2n}{2n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!}$$

و هو المطلوب $= C_{2n}^n$

$$C_{n-2}^{m-2} + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m = C_{n-2}^{m-2} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m$$

$$= C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

$$= C_n^m$$

ملاحظة : استعملنا خاصية مثلث باسكال : $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = C_n^m$

التبرين 23

حل في IN^2 الجمل التالية ذات المجهولين x و y

$$\begin{cases} 2C_x^2 = C_y^1 & -2 \\ C_{x+y-5}^2 = 4 & -1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} & -1 \\ C_{x+y}^2 = 10 & -1 \end{cases}$$

الحل - 23

$$\begin{cases} y-1 \geq 0 \\ x+1 \geq y \\ x+y \geq 2 \\ x \geq y-1 \\ C_{x+1}^y = C_x^{y-1} & \dots\dots\dots (1) \\ C_{x+y}^2 = 10 & \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} & -1 \\ C_{x+y}^2 = 10 & -1 \end{cases}$$

$$\frac{(x+y)!}{(x+y-2)!2!} = 10 \quad \text{نكافئ (2)}$$

$$\frac{(x+y)(x+y-1)}{2} = 10 \quad \text{نكافئ}$$

$$(x+y)(x+y-1) = 20 \quad \text{نكافئ}$$

$$x+y=5 \quad \text{نكافئ} \quad \text{لأن التحليل الممكن لـ 20 من الشكل } n(n-1) \text{ هو } 5 \times 4$$

$$\frac{(x+1)!}{(x-y+1)!y!} = \frac{x!}{(x-y+1)!(y-1)!} \quad \text{نكافئ (1)}$$

$$\frac{(x+1)!}{y!} = \frac{x!}{(y-1)!} \quad \text{نكافئ}$$

$$\frac{(x+1)x!}{y(y-1)!} = \frac{x!}{(y-1)!} \quad \text{نكافئ}$$

$$\frac{x+1}{y} = 1 \quad \text{نكافئ}$$

$$x+1=y \quad \text{نكافئ}$$

$$x-y=-1 \quad \text{نكافئ}$$

$$\text{نتيجة : } \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \quad \text{منه بالجمع : } 2x=4 \text{ أي } x=2$$

بالتعويض في أحد المساواة : $x+y=5$ أي $2+y=5$ منه $y=3$

خلاصة : $x = 2$ و $y = 3$

يكفي إذن أن نتأكد أن كل الشروط محققة كمايلي :

منه كل الشروط محققة
 إذن : حلول الجملة هي $\{(2; 3)\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} y-1 > 0 : \text{إذن } y-1=3-1=2 \\ x+1 \geq y : \text{إذن } x+1=2+1=3 \\ x+y > 2 : \text{إذن } x+y=3+2=5 \\ x \geq y-1 : \text{إذن } y-1=3-1=2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y \geq 1; x \geq 2 \\ x + y - 5 \geq 2 \\ 2 C_x^2 = C_y^1 \dots\dots\dots (1) \\ C_{x+y-5}^2 = 4 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} 2 C_x^2 = C_y^1 \\ C_{x+y-5}^2 = 4 \end{cases} \quad -2$$

$$\frac{2(x!)}{(x-2)! 2!} = y \quad (1) \text{ تكافئ}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} = y$$

تکافی

$$x(x-1) = y \quad \text{تکافی}$$

$$\frac{(x+y-5)!}{(x+y-7)! 2!} = 4 \quad (2) \text{ تكافئ}$$

$$\frac{(x+y-5)(x+y-6)(x+y-7)!}{(x+y-7)! \times 2!} = 4$$

$$(x + y - 5)(x + y - 6) = 8$$
تکافؤ:

نتيجة : $\begin{cases} x(x-1) = y \\ (x+y-5)(x+y-6) = 8 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x^2 = x + y \\ (x+y-5)(x+y-6) = 8 \dots\dots(\alpha) \end{cases}$

$$(2-x)^5 = [2 + (-x)]^5 \quad -2$$

$$= C_5^0 (-x)^5 (2)^0 + C_5^1 (-x)^4 (2)^1 + C_5^2 (-x)^3 (2)^2 + C_5^3 (-x)^2 (2)^3 + C_5^4 (-x) (2)^4 + C_5^5 (2)^5$$

$$= -x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32$$

$$(2x+1)^6 = C_6^0 (2x)^0 + C_6^1 (2x)^1 + C_6^2 (2x)^2 + C_6^3 (2x)^3 + C_6^4 (2x)^4 + C_6^5 (2x)^5 + C_6^6 (2x)^6 \quad -3$$

$$= 1 + 12x + 15 \times 4x^2 + 20 \times 8x^3 + 15 \times 16x^4 + 6 \times 32x^5 + 64x^6$$

$$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$$

تمرين - 25

i هو العدد المركب الذي طولته 1 و عمدته $\pi/2$

أحسب $(2-i)^7$ و $(2+i)^7$ ثم استنتج أن العدد $(2-i)^7 + (2+i)^7$ حقيقي

الحل - 25

باستعمال دستور ثنائي الحد لدينا :

$$(2+i)^7 = 2^7 + 7i(2)^6 + 21(i)^2(2)^5 + 35(i)^3(2)^4 + 35(i)^4(2)^3 + 21(i)^5(2)^2 + 7(i)^6(2) + (i)^7$$

$$= 2^7 + 7 \times 64i - 21 \times 32 - 35 \times 16i + 35 \times 8 + 21 \times 4i - 14 - i$$

$$(2-i)^7 = [2 + (-i)]^7$$

$$= 2^7 + 7(-i)(2)^6 + 21(-i)^2(2)^5 + 35(-i)^3(2)^4 + 35(-i)^4(2)^3 + 21(-i)^5(2)^2 + 7(-i)^6(2) + (-i)^7$$

$$= 2^7 - 7 \times 64i - 21 \times 32 + 35 \times 16i + 35 \times 8 - 21 \times 4i - 14 + i$$

$$(2+i)^7 + (2-i)^7 = 2[2^7 - 21 \times 32 + 35 \times 8 - 14] \quad \text{نتيجة :}$$

إذن : العدد $(2+i)^7 + (2-i)^7$ حقيقي

تمرين - 26

■ عدد طبيعي غير معدوم . أحسب المجاميع التالية بدلالة n .

$$c) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$$

$$a) \sum_{k=0}^n C_n^k 3^k \times 5^{n-k}$$

$$d) \sum_{k=0}^n C_n^k$$

$$b) \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k$$

الحل - 26

$$a) \sum_{k=0}^n C_n^k 3^k \times 5^{n-k} = (3+5)^n = 8^n$$

$$b) \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k \times (1)^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

$$c) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (1)^{n-k} = (1-1)^n = 0$$

$$d) \sum_{k=0}^n C_n^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (1)^k (1)^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

تمرين - 27

■ و m عدنان طبيعيان حيث $n \geq m \geq 1$

1- أثبت أن $m C_n^m = n C_{n-1}^{m-1}$ ثم أحسب $A = 1 + 2 C_n^2 + 3 C_n^3 + \dots + m C_n^m + \dots + n C_n^n$

2- أثبت أن : $m C_{n+1}^m = (n+1) C_n^{m-1}$ ثم أحسب B حيث

$$B = 1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{m+1} C_n^m + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n$$

الحل - 27

$$n C_{n-1}^{m-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} \quad -1$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!(m-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!(m-1)!} \times \frac{m}{m}$$

$$= m \times \frac{n!}{(n-m)! m!}$$

و هو المطلوب $= m C_n^m$

$$A = 1 + 2 C_n^2 + 3 C_n^3 + \dots + m C_n^m + (m+1) C_n^{m+1} + \dots + (n-1) C_n^{n-1} + n C_n^n$$

$$m C_n^m = n C_{n-1}^{m-1} \text{ لأن } 1 + n C_{n-1}^1 + n C_{n-1}^2 + \dots + n C_{n-1}^{m-1} + n C_{n-1}^m + \dots + n C_{n-1}^{n-2} + n C_{n-1}^{n-1}$$

$$(1) \text{ حسب السؤال } = 1 + n(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1})$$

$$= 1 + n \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k$$

$$= 1 + n [2^{n-1} - 1]$$

$$= 1 - n + n \times 2^{n-1}$$

$$A = 1 + 2 C_2^2 = 1 + 2 = 3$$

تحقيق : من أجل $n = 2$

$$1 - 2 + 2 \times 2^1 = -1 + 4 = 3$$

من جهة أخرى :

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k - 1$$

ملاحظة :

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1)^k (1)^{n-k} - 1$$

$$= (1+1)^{n-1} - 1$$

$$= 2^{n-1} - 1$$

$$(n+1) \times C_n^{m-1} = (n+1) \times \frac{n!}{(n-m+1)! (m-1)!}$$

- 2

$$= \frac{(n+1)!}{(n-m+1)! (m-1)!} \times \frac{m}{m}$$

$$= m \times \frac{(n+1)!}{(n-m+1)! m!}$$

و هو المطلوب $= m C_{n+1}^m$

$$C_{n+1}^m = \frac{n+1}{m} C_n^{m-1} \text{ منه } m C_{n+1}^m = (n+1) C_n^{m-1} \text{ لدينا :}$$

$$\frac{1}{n+1} C_{n+1}^m = \frac{1}{m} C_n^{m-1} \text{ أي}$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{m+1} C_n^m + \dots + \frac{1}{n} C_n^{n-1} + \frac{1}{n+1} C_n^n$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^2 + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^3 + \dots + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{m+1} + \dots + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^n + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1})$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1 - C_{n+1}^1)$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} [2^{n+1} - 1 - (n+1)]$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

ملاحظة : استعملنا المساواة :

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$$

$$1 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$$

إذن :

$$C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1} - 1 - C_{n+1}^1 \quad \text{منه :}$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} C_2^1 + \frac{1}{3} C_2^2 = 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad \text{تحقيق : من أجل } n = 2$$

$$\frac{2^3 - 1}{3} = \frac{7}{3} \quad \text{من جهة أخرى :}$$

التمرين - 28

$n \geq m > 0$ عدنان طبيعان حيث

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m \quad 1 - \text{أثبت أن}$$

$$C_m^m + C_{m+1}^m + \dots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1} \quad 2 - \text{استنتج أن}$$

الحل - 28

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!} \quad -1$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} \times \frac{m}{m} + \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!} \times \frac{(n-m)}{(n-m)}$$

$$= \frac{m(n-1)!}{(n-m)!m!} + \frac{(n-m)(n-1)!}{(n-m)!m!}$$

$$= \frac{(n-1)! [m+n-m]}{(n-m)!m!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(n-m)!m!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

$$= C_n^m \quad \text{وهو المطلوب}$$

2 - حسب السؤال الأول لدينا مايلي :

$$\oplus C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_{n-1}^{m+1}$$

$$\oplus C_{n-1}^{m+1} = C_{n-1}^m + C_{n-2}^{m+1}$$

$$\oplus C_{n-2}^{m+1} = C_{n-2}^m + C_{n-3}^{m+1}$$

$$\vdots$$

$$\oplus C_{m+3}^{m+1} = C_{m+2}^m + C_{m+2}^{m+1}$$

$$\oplus C_{m+2}^{m+1} = C_{m+1}^m + C_{m+1}^{m+1}$$

جمع هذه المساواة طرف لـ طرف
تحصل على :

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_{n-1}^m + C_{n-2}^m + \dots + C_{m+2}^m + C_{m+1}^m + C_{m+1}^{m+1}$$

$$C_{m+1}^{m+1} = C_m^m = 1 \quad \text{لأن } C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_{n-1}^m + \dots + C_{m+1}^m + C_{m+1}^{m+1} \quad \text{أي :}$$

التمرين - 29

ليكن المنشور $(x^3 - \frac{2}{x^2})^{15}$ حيث $x \in \mathbb{R}^*$

1 - أكتب الحد الذي درجته 10

2 - أوجد معامل الحد التاسع

3 - أوجد الحد الثابت

الحل - 29

$$\begin{aligned}
 \left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15} &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{3k} (-1)^{15-k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^{15-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{3k} (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{2k-30} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{3k+2k-30} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{5k-30}
 \end{aligned}$$

1 - الحد ذو الدرجة 10 من أجل : $5k - 30 = 10$ أي : $5k = 40$ منه $k = 8$

$$C_{15}^8 (-1)^{15-8} (2)^{15-8} x^{10} \quad \text{إذن : الحد هو :}$$

$$C_{15}^8 = \frac{15!}{7!8!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 6435$$

منه : الحد ذو الدرجة 10 هو : $-6435 \times 2^7 x^{10} = -823680 x^{10}$: $k = 8$ (لأن k يأخذ القيم من 0 إلى 15)
 2 - الحد التاسع هو الحد ذو $k = 8$ (لأن k يأخذ القيم من 0 إلى 15)
 منه الحد هو : $-823680 x^{10}$ أي معامل الحد التاسع هو -823680

3 - يكون الحد ثابت من أجل : $5k - 30 = 0$ أي $k = 6$

$$C_{15}^6 (-1)^{15-6} (2)^{15-6} \quad \text{منه الحد الثابت هو :}$$

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{9!6!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 5005$$

منه الحد الثابت هو : $-5005 \times 2^9 = -2562560$

التمرين - 30

n عدد طبيعي غير معدوم . ليكن المنشور $(1+x)^n$ حيث $x \in \mathbb{R}$

- 1 - عين قيمة n حتى يكون الحد الثالث في المنشور هو $28x^2$
- 2 - من أجل قيمة n المحصل عليها عين x حتى يكون الحد الخامس هو 1120
- 3 - نضع $n = 15$

عين قيمة العدد الطبيعي m حتى يكون الحدان اللذان رتبتهما $(m-1)$ و $(2m+3)$ متساويي المعامل .

الحل - 30

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \quad - 1$$

الحد الثالث من أجل $k = 2$ هو : $C_n^2 x^2$

$$C_n^2 = 28 \quad \text{إذن : } C_n^2 x^2 = 28 x^2 \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} = 28 \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 28 \quad \text{يكافئ}$$

$$n(n-1) = 56 \quad \text{يكافئ}$$

$$n^2 - n - 56 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\Delta = 1 + 224 = 225 = (15)^2$$

$$n_1 = \frac{1-15}{2} = -7 \quad \text{مرفوض}$$

$$n_2 = \frac{1+15}{2} = 8 \quad \text{مقبول}$$

نتيجة : $n = 8$

$$C_8^4 x^4 = \frac{8!}{4!4!} x^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} x^4 = 70 x^4 \text{ هو الحد الخامس هو}$$

$$x^4 = 16 \quad \text{إذن : } 70 x^4 = 1120 \quad \text{يكافئ}$$

$$x = \sqrt[4]{16} \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{array} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : توجد قيمتين لـ x حتى يكون الحد الخامس هو 1120 وهما $\{-2; 2\}$
 3- من أجل $n = 15$

الحد ذو الرتبة $m - 1$ من أجل $k = m - 2$ هو $C_{15}^{m-2} x^{m-2}$

الحد ذو الرتبة $2m + 3$ من أجل $k = 2m + 2$ هو $C_{15}^{2m+2} x^{2m+2}$

$$\text{إذن : } C_{15}^{m-2} = C_{15}^{2m+2}$$

$$m - 2 = 2m + 2$$

أو

$$m - 2 = 15 - (2m + 2)$$

أو

$$2m + 2 = 15 - (m - 2)$$

$$-m = 4$$

أو

$$m - 2 = 15 + 2m + 2$$

أو

$$2m + 2 = 17 - m$$

$$m = -4 \quad \text{مرفوض}$$

أو

$$m = -19 \quad \text{مرفوض}$$

أو

$$m = 5$$

$$m = 5 \quad \text{يكافئ}$$

تمرين - 31

ليكن X المتغير العشوائي المعروف كما يلي :

α	-1	2	3	4
$p(X = \alpha)$	1/3	1/4	1/5	a

1- عين قيمة العدد الحقيقي a

2- أحسب $P(X \geq 5/2)$ ثم $P(X < 1)$

3- أحسب $p(X^2 \leq 2)$

4- أحسب $p(X^2 - 6X + 8 < 0)$

الحل - 31

$$1- \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + a = 1 \quad \text{منه}$$

$$\frac{47}{60} + a = 1 \quad \text{أي :}$$

$$a = 1 - \frac{47}{60}$$

$$a = \frac{13}{60} \quad \text{أي :}$$

$$p(X \geq 5/2) = p(X = 3) + p(X = 4)$$

$$= \frac{1}{5} + a$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{13}{60}$$

$$= \frac{25}{60}$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$p(X < 1) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$p(X^2 \leq 2) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$$

— 3

— 4

X	-1	2	3	4
X ²	1	4	9	16
-6X	6	-12	-18	-24
X ² - 6X + 8	15	0	-1	0

$$p(X^2 - 6X + 8 < 0) = p(X = 3) = \frac{1}{5} \quad \text{نتيجة :}$$

التمرين — 32

يحتوي كيس على 5 كرات تحمل الرقم 10 و 3 كرات تحمل الرقم 15
نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس
X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المسحوبين .

1 — ما هي القيم الممكنة للمتغير X

2 — عرف قانون احتمال المتغير X

3 — أحسب E(X) الأمل الرياضي للمتغير X

4 — أحسب التباين Var(X)

5 — أحسب p(X ≥ 25)

الحل — 32

— 1

إذن : القيم الممكنة لـ X هي {20 ; 25 ; 30}

⊕	10	15
10	20	25
15	25	30

$$C_8^2 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

2 — عدد الحالات الممكنة للسحب

$$C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين تحملان الرقم 10 : 10

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين تحملان الرقم 15 :

عدد الحالات الملائمة لسحب كرة تحمل 15 و أخرى تحمل 10 : 15 : $C_5^1 \times C_3^1 = 5 \times 3 = 15$

منه : $p(X = 30) = 3/28$ ؛ $p(X = 25) = 15/28$ ؛ $p(X = 20) = 10/28$

إذن : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

α	20	25	30
p(X = α)	10/28	15/28	3/28

$$E(X) = 20\left(\frac{10}{28}\right) + 25\left(\frac{15}{28}\right) + 30\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{200 + 375 + 90}{28} = 23,75 \quad \text{— 3}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{10}{28}(3,75)^2 + \frac{15}{28}(1,25)^2 + \frac{3}{28}(6,25)^2 = 10,04 \quad \text{— 4}$$

$$p(X \geq 25) = p(X = 25) + p(X = 30) \quad \text{— 5}$$

1	2	1	0	1
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

$$= \frac{15}{28} + \frac{3}{28}$$

$$= \frac{18}{28}$$

$$= \frac{9}{14}$$

تمرين 33

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و 3 كرات سوداء مرقمة 1 ، 2 ، 3 .
تسحب عشوائياً كرة واحدة من الصندوق .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق الكرة البيضاء بالرقم (1+) و الكرة السوداء بـ 0
ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة الرقم الذي تحمله .

1- عرف قانون احتمال كل من X و Y

2- أحسب $E(X)$ و $E(Y)$

3- أثبت أن المتغيران X و Y مستقلان

4- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي T حيث $T = XY$ ثم أحسب $E(T)$

الحل 33

1- القيم الممكنة لـ X هي $\{0; 1\}$

X_i	0	1
$p(X = X_i)$	1/2	1/2

$$p(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

القيم الممكنة لـ Y هي $\{1; 2; 3\}$

Y_i	1	2	3
$p(Y = Y_i)$	1/3	1/3	1/3

$$p(Y = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(Y = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(Y = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 0; Y = 1) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 0; Y = 2) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 0; Y = 3) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 1; Y = 1) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 1; Y = 2) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 1; Y = 3) = \frac{1}{6}$$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0; 1\}$ ؛ من أجل كل $k \in \{1; 2; 3\}$

إذن : المتغيران X و Y مستقلان $p(X = i) \times p(Y = k) = p(X = i; Y = k)$

4 - نضع $T = X Y$ إذن : القيم الممكنة لـ T هي $\{0; 1; 2; 3\}$

T_i	0	1	2	3
$p(T = T_i)$	1/2	1/6	1/6	1/6

$$E(T) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1+2+3}{6} = 1 \quad \text{منه :}$$

التمرين - 34

يحتوي كيس على 4 كرات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، a حيث $a \in \mathbb{N}$

نسحب كرة واحدة من الكيس . نضع P_k احتمال سحب الكرة ذات الرقم k (السحب ليس متساوي الاحتمال)

1 - أحسب P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a علما أنها بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{18}$

2 - ليكن F المتغير العشوائي الذي يرفق كل كرة مسحوبة بالرقم الذي تحمله . أوجد قيمة العدد الطبيعي a حتى يكون

$$E(F) = \frac{43}{9} \quad \text{الأمـل الرياضيـاتي للمتغير } F \text{ هو}$$

الحـل - 34

$$P_1 + \left(P_1 + \frac{1}{18}\right) + \left(P_1 + \frac{2}{18}\right) + \left(P_1 + \frac{3}{18}\right) = 1 \quad \text{إذن :} \quad P_a + P_3 + P_2 + P_1 = 1 \quad 1 -$$

$$4P_1 + \frac{6}{18} = 1 \quad \text{أي :}$$

$$4P_1 = 1 - \frac{1}{3} \quad \text{أي :}$$

$$P_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad \text{أي :}$$

$$P_1 = \frac{1}{6} \quad \text{نتيجة :}$$

$$P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$P_3 = \frac{2}{9} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

$$P_a = \frac{5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

2 - قانون المتغير العشوائي F هو كمايلي :

F_i	1	2	3	a
$P(F = F_i)$	1/6	2/9	5/18	1/3

$$E(F) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{2}{9}\right) + 3\left(\frac{5}{18}\right) + a\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{9} + \frac{15}{18} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{3+8+15}{18} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{26}{18} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{13}{9} + \frac{a}{3}$$

$$\frac{13}{9} + \frac{a}{3} = \frac{43}{9}$$

$$E(F) = \frac{43}{9} \quad \text{يكافئ :}$$

$$\frac{a}{3} = \frac{43}{9} - \frac{13}{9}$$

يكافئ

$$\frac{a}{3} = \frac{30}{9} \quad \text{يكافئ}$$

$$9a = 90 \quad \text{يكافئ}$$

$$a = 10 \quad \text{يكافئ}$$

التمرين - 35

يحتوي كيس على 20 كرات مرقمة من 1 إلى 20 لا نفرق بينها عند اللمس

(I) نسحب من الكيس كرة واحدة . ما هو احتمال الحوادث التالية :

(A) الحصول على مضاعف 4

(B) كرة تحمل عددا ليس مضاعفا 5

(II) نسحب من الكيس كرتين في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

(A) كرتين تحملان مضاعفا 4

(B) كرة تحمل مضاعف 3 و أخرى تحمل مضاعف 4

(III) نسحب الآن 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

(A) ثلاث كرات مضاعفات 4

(B) ثلاث كرات مجموع أرقامها زوجي

الحل - 35

(I) مضاعفات 4 هي {20; 16; 12; 8; 4}

الأرقام غير مضاعفات 5 هي {19; 18; 17; 16; 14; 13; 12; 11; 9; 8; 7; 6; 4; 3; 2; 1}

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad \text{نتيجة :}$$

$$P(B) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{18!2!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190 \quad \text{(II) عدد الحالات الممكنة هو}$$

مضاعفات 4 : {20; 16; 12; 8; 4}

مضاعفات 3 : {18; 15; 12; 9; 6; 3}

$$P(A) = \frac{C_5^2}{190} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19} \quad \text{نتيجة :}$$

لاحظ أن العدد 12 مضاعف لكل

من 3 و 4 إذن نميز 3 حالات

كإيلي :

مضاعف 3 و مضاعف 4 مختلفين عن 12
12 و مضاعف 4 مختلف عن 12
12 و مضاعف 3 مختلف عن 12

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_5^1 + C_1^1 \times C_5^1 + C_1^1 \times C_4^1}{190}$$

$$= \frac{4 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 4}{190}$$

$$= \frac{20 + 5 + 4}{190}$$

$$= \frac{29}{190}$$

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{17!3!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2} = 1140 \quad \text{(III) عدد الحالات الممكنة :}$$

$$P(A) = \frac{C_5^3}{1140} = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}$$

سحب 3 كرات مجموع أرقامها زوجي يوافق أحد الحالات التالية :

سحب 3 أرقام زوجية

سحب رقمين فرديين و رقم زوجي علما أن

عدد الأرقام الفردية هو : 10

عدد الأرقام الزوجية هو : 10

إذن :

$$P(B) = \frac{C_{10}^3 + C_{10}^2 \times C_{10}^1}{1140} = \frac{120 + 45 \times 10}{1140} = \frac{570}{1140} = \frac{57}{114} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2}$$

التمرين - 36

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة الاحتمال موزعة كمايلي :

5 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3

3 كرات خضراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3

2 كرات حمراء تحمل الأرقام 3 ، 3

نسحب من الكيس 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

(A) الحصول على كرة بيضاء و كرتين حمراوين

(B) الحصول على كرة حمراء على الأقل

(C) الحصول على كرات مجموع أرقامها أكبر تماما من 7

الحل - 36

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

عدد الحالات الممكنة :

$$C_5^1 \times C_2^2 = 5 \times 1 = 5$$

عدد الحالات الملائمة للحادثة A هو :

$$P(A) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

منه :

$$C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

عدد الحالات الملائمة للحادثة $\bar{B}$ هو 56 (و لا كرة حمراء)

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{56}{120} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

منه :

يكون مجموع الأرقام المسحوبة أكبر تماما من 7 إذا و فقط إذا تم سحب 3 كرات تحمل الرقم 3 أو 2 كرات تحمل الرقم 3 و كرة تحمل الرقم 2

$$C_4^3 + C_4^2 \times C_3^1 = 4 + 6 \times 3 = 22$$

إذن : عدد الحالات الملائمة هو :

$$P(C) = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}$$

منه :

التمرين - 37

في سباق 400 متر تتابع كل فريق يتكون من 4 عدائين

يريد المدرب تشكيل فريق للمشاركة في المسابقة من بين 10 عدائين حيث يتم تحديد رتبة انطلاق كل عداء من العدائين الأربعة المشكلين للفريق

1 - كم من فريق مختلف يمكن للمدرب تشكيله

2 - ما هو احتمال أن يكون عداء ما ضمن الفريق المختار

الحل - 37

1 - عند اختيار 4 عدائين نهتم بترتيبهم حسب الانطلاق

إذن : عدد الحالات الممكنة هي تراتيب لـ 4 عناصر من بين 10 عناصر و عددها :

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

2 - عدد الحالات الملائمة للحادثة "الفريق لا يضم لاعب معين" هو A_9^4 (الحادثة العكسية)

$$A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

أي :

منه : احتمال أن يكون الفريق يضم لاعب معين هو :

$$1 - \frac{3024}{5040} = \frac{2016}{5040} = \frac{2}{5}$$

التمرين - 38

في ثانوية ما 25% من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15% منهم مستواهم ضعيف في مادة الفيزياء و 10% منهم مستواهم ضعيف في مادتي الرياضيات و الفيزياء معا .

نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية .

1 - إذا كان هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الفيزياء فما هو احتمال أن يكون مستواه ضعيفا أيضا في مادة الرياضيات ؟ .

2 - إذا كان هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الرياضيات فما هو احتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء أيضا ؟ .

3 - ما هو احتمال أن يكون هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الفيزياء أو في مادة الرياضيات

الحل - 38

تكن الحوادث التالية :

A : التلميذ ضعيف في مادة الرياضيات

B : التلميذ ضعيف في مادة الفيزياء

1 - احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الرياضيات علما أنه ضعيف في الفيزياء هو :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

2 - احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الفيزياء علما أنه ضعيف في الرياضيات هو :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

3 - احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في إحدى المادتين الرياضيات أو الفيزياء هو :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{25}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100}$$

$$= \frac{25 + 15 - 10}{100}$$

$$= \frac{30}{100}$$

$$= \frac{3}{10}$$

التمرين - 39

يضم صندوق 3 قطع نقدية موزعة كمايلي :

القطعة الأولى تحمل وجه و ظهر متساوي الاحتمال

القطعة الثانية تحمل وجهين (لا تحمل ظهر)

القطعة الثالثة تحمل وجه و ظهر حيث احتمال ظهور الوجه هو 1/3

نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق ثم نرميها مرة واحدة

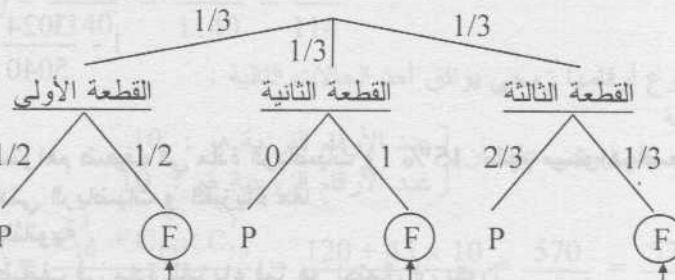
ما هو احتمال الحصول على وجه

الحل - 39

نرمز إلى الوجه بـ F و إلى الظهر بـ P

تتبع عملية اختيار القطعة من الصندوق متساوية الاحتمال و كل منها يساوي 1/3

إذن : نرسم الشجرة التالية :



نتيجة : احتمال الحصول على الوجه F هو :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3+6+2}{18} = \frac{11}{18}$$

ملاحظة : القطة الثانية لا تحمل ظهر إذن $P(F) = 1$ و $P(P) = 0$

التمرين 40

A ، B ، C ثلاث صناديق حيث :

الصندوق A مكون من 3 كرات حمراء و 5 كرات سوداء

الصندوق B مكون من 2 كرات حمراء و كرة سوداء

الصندوق C مكون من 2 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نأخذ أحد الصناديق عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة

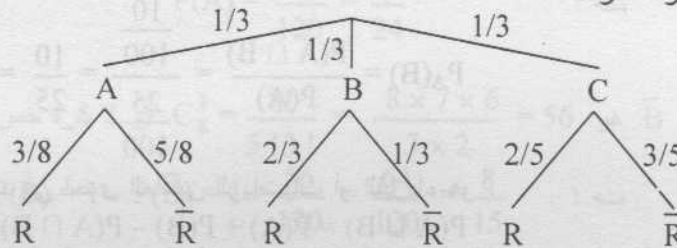
إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق A ؟

الحل 40

لتكن A : الحادثة اختيار الصندوق A إذن : $P(A) = 1/3$

لتكن R : الحادثة سحب كرة حمراء

لدينا الشجرة التالية :



احتمال سحب الكرة من الصندوق A علما أنها حمراء هو الاحتمال الشرطي

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)}$$

$$p(A \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{3}{8} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{45 + 80 + 48}{120} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{173}{120}$$

$$P_R(A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{3 \times 120}} = \frac{1}{8} \times \frac{3 \times 120}{173} = \frac{45}{173}$$

نتيجة :

التمرين - 41

يضم كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين
تسحب من الكيس كرتين على التوالي دون إرجاع
ترمز بـ B_i للحادثة الكرة المسحوبة في المرة i بيضاء

1 - أحسب الاحتمال $P(B_1)$ ثم $P_{B_1}(B_2)$

2 - استنتج $P(B_2 \cap B_1)$

الحل - 41

1 - $P(B_1) = \frac{10}{12}$ (سحب كرة أولى بيضاء)

$P_{B_1}(B_2) = \frac{9}{11}$ (سحب كرة بيضاء في المرة الثانية علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء إذن تبقى 9 كرات بيضاء من بين 11 كرات)

2 - لدينا : $P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)}$

$P(B_1 \cap B_2) = P_{B_1}(B_2) \times P(B_1)$ منه :

$$= \frac{9}{11} \times \frac{10}{12}$$

$$= \frac{90}{132}$$

$$= \frac{15}{22}$$

نماذج للبكالوريا

التمرين 1 -

يحتوي صندوق على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

(I) ن سحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على 3 كرات بيضاء . C : الحصول على كرة بيضاء على الأقل

B : الحصول على 3 كرات سوداء .

(II) ن سحب 4 كرات في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء

B : الحصول على 3 كرات سوداء و كرة بيضاء .

(III) ن سحب 3 كرات في آن واحد ولا نعيدها إلى الصندوق ثم ن سحب من الباقي 4 كرات في آن واحد .

ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاثة الأولى بيضاء و من بين الكرات الأربعة المسحوبة بعد ذلك كرة واحدة بيضاء فقط .

الحل 1 -

(I) عدد الحالات الممكنة هو : $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$

$$P(A) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{120 \times 3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

(II) عدد الحالات الممكنة هو : $C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$

$$P(A) = \frac{C_6^3 \times C_4^1}{C_{10}^4} = \frac{20 \times 4}{210} = \frac{8}{21}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3 \times C_6^1}{C_{10}^4} = \frac{4 \times 6}{210} = \frac{4}{35}$$

(III) احتمال سحب 3 كرات بيضاء في المرة الأولى هو : $\frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

بعد الحصول على 3 كرات بيضاء يبقى في الصندوق 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

إن : احتمال سحب كرة واحدة بيضاء عند سحب 4 كرات في آن واحد هو :

$$\frac{C_3^1 \times C_4^3}{C_7^4} = \frac{3 \times 4}{35} = \frac{12}{35}$$

نتيجة : احتمال سحب 3 كرات بيضاء في المرة الأولى و كرة واحدة بيضاء في المرة الثانية هو :

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{12}{35} = \frac{2}{35}$$

التمرين 2 -

يحتوي صندوق على 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10

ن سحب من الصندوق كرتين على التوالي مع الارجاع

1 - أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4

2 - أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 علما أن مجموعهما 10

الحل - 2

عدد الحالات الممكنة للسحب هي قوائم لـ عنصرين من بين 10 عناصر و عددها $10^2 = 100$

1 - لتكن A الحادثة : سحب كرتين فرقهما 4

الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي $(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 9), (6, 10), (7, 3), (8, 4), (9, 5), (10, 6)$

$$P(A) = \frac{12}{100} \quad \text{منه :}$$

2 - لتكن B الحادثة : سحب كرتين مجموعهما 10

الحالات الملائمة للحادثة B هي $(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)$

$$P(B) = \frac{9}{100} \quad \text{منه (1, 9)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{100} \quad \text{منه (3, 7), (7, 3)}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{9}{100}} = \frac{2}{9} \quad \text{نتيجة :}$$

تمرين - 3

يكون قسم من 25 % بنات و 75 % ذكور
نحرض أن 60 % من البنات و 30 % من الأولاد هم تلاميذ جيّدون .
نأخذ عشوائياً تلميذاً من القسم . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : أن يكون التلميذ بنتاً

B : أن يكون التلميذ ولداً

C : أن يكون التلميذ جيداً

D : أن يكون التلميذ بنتاً علماً أنها عنصر جيد

الحل - 3

$$P(A) = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) \quad \text{(بنت جيدة أو ولد جيد)}$$

$$= \frac{25}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{75}{100} \times \frac{30}{100}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{10}$$

$$= \frac{6+9}{40}$$

$$= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$P(D) = \frac{2}{5} \quad \text{منه} \quad P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{25}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{5}$$

التمرين 4 -

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 و 3 كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين مرقمة من 9 إلى 10

نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : الكرتان تحملان رقمين فرديين

B : الكرتان من نفس اللون

C : الكرتان تحملان رقمين فرديين و من نفس اللون

D : الكرتان من لونان مختلفان

E : الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين

الحل - 4

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \quad \text{عدد الحالات الممكنة هو}$$

الألوان	بيضاء	حمراء	خضراء
الأرقام	5, 4, 3, 2, 1	8, 7, 6	10, 9
عدد الأرقام الفردية	3	1	1

$$P(A) = \frac{C_5^2}{45} = \frac{1}{45} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{45 \times 2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$P(B) = \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_2^2}{45} = \frac{10 + 3 + 1}{45} = \frac{14}{45}$$

$$P(C) = \frac{C_3^2}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

لاحظ أن يوجد 3 كرات بيضاء تحمل أرقام فردية

إذن : لا يمكن سحب كرتين خضراوين أو حمراوين و تحملان أرقام فردية

$$P(D) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 + C_5^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_2^1}{45} = \frac{5 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 2}{45} = \frac{31}{45}$$

$$P(E) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1}{45} = \frac{3 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 1}{45} = \frac{7}{45}$$

تفسير : حتى تكون الكرات مختلفة الألوان و تحمل أرقام فردية يجب أن تكون : (بيضاء فردية ، حمراء فردية) أو (بيضاء فردية ، خضراء فردية) أو (حمراء فردية ، خضراء فردية)

التمرين 5 -

A ، B ، C ثلاث صناديق تحتوي على كرات موزعة كمايلي :

في الصندوق A : 5 كرات بيضاء و كرة سوداء

في الصندوق B : 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

في الصندوق C : كرة بيضاء و 4 كرات سوداء

يقوم لاعب برمي زهرة نرد ذات 6 أوجه مرقمة و متساوية الاحتمال .

إذا كان الرقم الظاهر هو 1 يسحب من الصندوق A

إذا كان الرقم الظاهر 2 أو 3 يسحب من الصندوق B

إذا كان الرقم الظاهر 4 أو 5 أو 6 يسحب من الصندوق C

(I) إذا كان اللاعب يسحب كرة واحدة فقط ، أحسب احتمال أن تكون بيضاء

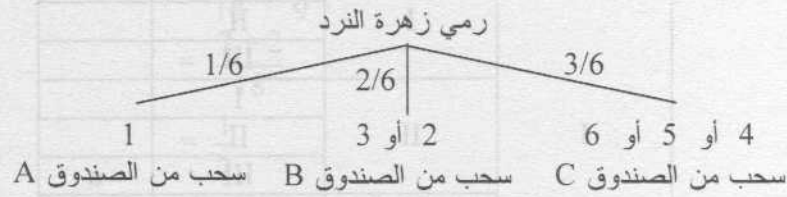
(II) إذا كان اللاعب يسحب كرتان في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

X : كرتين بيضاوين

Y : كرتين سوداوين من الصندوق B .

الحل - 5

لدينا الشجرة التالية :



(II) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو مجموع ثلاث احتمالات كمايلي :

. أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق A .

. أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق B .

. أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق C .

نتيجة : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو كمايلي :

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{36} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} = \frac{5}{36} + \frac{3}{10} = \frac{25 + 54}{180} = \frac{79}{180}$$

(II) الكرتان بيضاوين في حالتين فقط كمايلي :

A كرتان بيضاوين من الصندوق

B كرتان بيضاوين من الصندوق

منه احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{6} \times \frac{C_5^2}{C_6^2} + \frac{2}{6} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{10}{15} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{19}{90} \end{aligned}$$

$$P(Y) = \frac{2}{6} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{30} \quad \text{كرتين سوداوين من الصندوق B :}$$

التحيز - 6

X و Y لاعبان لرمي الأسهم كل منهما يسدد سهمه نحو هدف دائري مقسم إلى 3 مناطق I ، II ، III . حيث كل

رمية تصيب منطقة واحدة فقط من بين المناطق I ، II ، III

احتمال إصابة الرامي X للمناطق I ، II ، III هي على الترتيب 1/12 ، 1/3 و 7/12 أما احتمالات إصابة

الرامي Y للمناطق I ، II ، III فهي متساوية .

يسدد الرامي X سهمه ثلاث مرات متتابة . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يصيب المنطقة III في كل رمية .

B : يصيب المناطق I ، II ، III بهذا الترتيب .

C : يصيب المناطق I ، II ، III

تقرر الآن أحد الراميين X أو Y علما أن احتمال اختيار الرامي X هو ضعف احتمال اختيار الرامي Y

في حالة تسديد رمية واحدة ما هو احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة III

الحل - 6

لدينا الحالات التالية للرامي X :

الحادثة	الرمية الثالثة	الرمية الثانية	الرمية الأولى
	I	I	I
	II		
	III		
	I	II	
	II		
a	III		
	I	III	
b	II		
	III		
	I	I	II
	II		
c	III		
	I	II	
	II		
	III		
d	I	III	
	II		
	III		
	I	I	III
e	II		
	III		
f	I	II	
	II		
	III		
	I	III	
	II		
g	III		

نتيجة :

$$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{1728} \quad \text{الحدث g توافق الحدث A منه :}$$

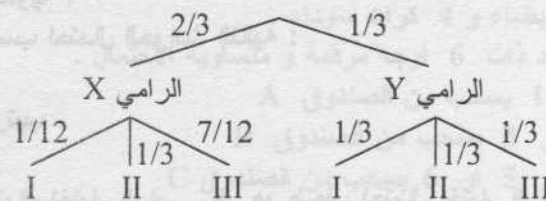
$$P(B) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{432} \quad \text{الحدث a توافق الحدث B إذن :}$$

الحوادث a ، b ، c ، d ، e ، f توافق الحدث C منه

$$P(C) = 6 \times \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} \right) = \frac{6 \times 7}{432} = \frac{7}{72}$$

باختيار أحد الراميين نضع α احتمال اختيار الرامي Yمنه : $\alpha + 2\alpha = 1$ أي $\alpha = 1/3$

منه الشجرة التالية :



$$\begin{aligned}
 P &= \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{7}{18} + \frac{1}{9} \\
 &= \frac{7+2}{18} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

احتمال أن تصيب الرمية المنطقة III هو :
تفسير : إما أن تكون الرمية من اللاعب X
أو تكون الرمية من اللاعب Y

التمرين 7 -

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$ (1)

- 1- أوجد z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة (1) ثم أكتبها على شكلها المثلثي .
- 2- عين الجذور التربيعية لكل من z_1, z_2, z_3
- زهرة نرد متجانسة الأوجه كل وجه منها يحمل جذرا تربيعيا من الجذور المحصل عليها في السؤال (2) نرمي هذه الزهرة مرتين متتابعتين

3- ما هو احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان ؟

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل عمليتي رمي بطويلة جداء العددين المركبين المحصل عليهما

4- عرف قانون الاحتمال للمتغير X

5- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير X

الحل 7 -

1- لاحظ أن $z_1 = i$ هو حل للمعادلة $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$

لنبحث عن الحلول الأخرى :

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 - 4z^2 + z - 4 & z - i \\
 \hline
 z^3 - iz^2 & z^2 + (-4+i)z - 4i \\
 \hline
 (-4+i)z^2 + z - 4 & \\
 (-4+i)z^2 + (4i+1)z & \\
 \hline
 -4iz - 4 & \\
 -4iz - 4 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

لنحل المعادلة $z^2 + (-4+i)z - 4i = 0$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 16 - 8i - 1 + 16i \\
 &= 15 + 8i \\
 &= (4+i)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 z_2 = \frac{4-i+4+i}{2} = 4 \\
 z_1 = \frac{4-i-4-i}{2} = -i
 \end{cases}$$

نتيجة : $z_1 = i ; z_2 = 4 ; z_3 = -i$

2- جذور z_1 هي : $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i ; \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right\}$

جذور z_2 هي : $\{2; -2\}$

جذور z_3 هي : $\left\{ \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i ; \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right\}$

3- احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان هو :

$$P = 3 \times \left(\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \right) = \frac{1}{3}$$

تفسير : إما نحصل على جذر z_1 ثم الجذر الآخر $-z_1$ (يمكن أن يكون نفسه)

أو نحصل على جذر z_2 ثم الجذر الآخر $-z_2$ (يمكن أن يكون نفسه)

أو نحصل على جذر z_3 ثم الجذر الآخر $-z_3$ (يمكن أن يكون نفسه)

ملاحظة : إذا سمينا على الترتيب a, b, c, d, e, f الجذور التربيعية للأعداد المركبة z_1, z_2, z_3 فإن الحالات الملائمة للحادثة هي :

$(a, a), (b, a), (a, b), (b, b), (c, c), (d, c), (d, d), (c, d), (e, e)$

$(f, f), (f, e), (e, f)$ و عددها 12

و عدد الحالات الممكنة هو $6^2 = 36$

منه : الاحتمال المطلوب هو $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

4 - كل من الجذور التربيعية للأعداد z_1, z_2, z_3 طاولاتها على الترتيب 1, 2, 1

إن : القيم الممكنة لـ X هي 4, 2, 1 $(|z \cdot z'| = |z| \times |z'|)$

$$P(X=1) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

تفسير : نسحب في المرة الأولى أحد الجذور وفي المرة الثانية

أحد الجذور حيث جداء طاولتيهما يساوي قيمة X

$$P(X=2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=4) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

منه : قانون الاحتمال للمتغير X كمايلي :

X_i	1	2	4
$P(X = X_i)$	4/9	4/9	1/9

$$E(x) = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

التمرين 8 -

A و B صندوقان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :

الصندوق A : 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء

الصندوق B : 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق A و نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق B

ثم نسحب من الصندوق B كرة أخرى و نسجل لونها

1 - ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين

2 - ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون

3 - نرفق بكل كرة بيضاء العدد الحقيقي α و كل كرة سوداء العدد $(-\alpha)$ و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل

سحب كرتين مجموع الأعداد المرفقة بها

(a) عرف قانون احتمال المتغير X ثم أحسب $E(X)$ (أمله الرياضي)

(b) عين α حتى يكون $E(X) = 1$

4 - نضيف إلى الصندوق B $(n-3)$ كرة سوداء حيث n عدد طبيعي أكبر من 3

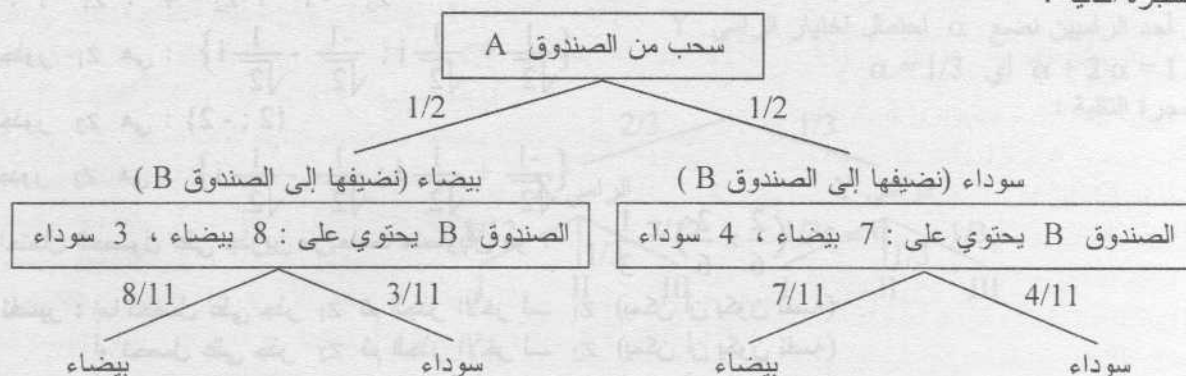
نعيد عملية السحب كما في السؤال (1)

(a) ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين .

(b) عين قيمة n حتى يكون احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي 0,25

الحل - 8

لدينا الشجرة التالية :



نتيجة :

1 - احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{11} = \frac{4}{11}$$

2 - احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون هو

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{4}{11} + \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$$

3 - القيم الممكنة لـ X هي $\{2\alpha; -2\alpha; 0\}$ حسب الحالات التالية :الكرتين بيضاوين : $\alpha + \alpha = 2\alpha$ الكرتين سوداوين : $-\alpha - \alpha = -2\alpha$ الكرتين مختلفتين في اللون : $\alpha - \alpha = 0$ (a) منه قانون احتمال المتغير x كمايلي :

X_i	0	-2α	2α
$P(X = X_i)$	5/11	2/11	4/11

حسب السؤال الأول :

$$P(X = 2\alpha) = \frac{4}{11}$$

$$P(X = -2\alpha) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{11}$$

$$P(X = 0) = 1 - \left(\frac{4}{11} + \frac{2}{11} \right) = \frac{5}{11}$$

إذن :

$$E(X) = 0 - 2\alpha \left(\frac{2}{11} \right) + 2\alpha \left(\frac{4}{11} \right) = \frac{-4\alpha + 8\alpha}{11} = \frac{4\alpha}{11}$$

(b)

يكافئ

$$\frac{4\alpha}{11} = 1$$

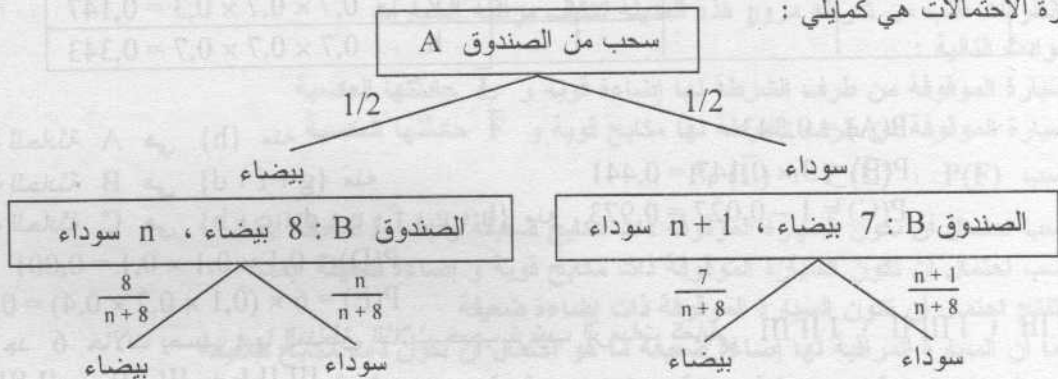
يكافئ

$$4\alpha = 11$$

يكافئ

$$\alpha = \frac{11}{4}$$

4 - نعيد عملية السحب بعد اضافة (n-3) كرة سوداء إلى الصندوق B شجرة الاحتمالات هي كمايلي :



$$P = \frac{1}{2} \times \frac{8}{n+8} = \frac{4}{n+8}$$

$$\frac{4}{n+8} = 0,25 \quad \text{يكافئ} \quad P = 0,25 \quad (b)$$

$$\frac{4}{n+8} = \frac{1}{4} \quad \text{يكافئ}$$

$$n+8 = 16 \quad \text{يكافئ}$$

$$n = 8 \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : للحصول على احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي 0,25 يكفي أن يكون $n = 8$ B إذن يكفي أن نضيف 5 كرات سوداء إلى الصندوق $n - 3 = 8 - 3 = 5$

التمرين 9 -

(I) يسدد لاعب 3 رميات متتابة نحو هدف

إذا علمت أن احتمال أن يصيب الهدف هو 0,7 أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يصيب الهدف 3 مرات

B : يصيب الهدف مرتين فقط

C : يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل

(II) إذا علمت أن الهدف مكون من 3 مناطق مختلفة I ، II ، III حيث احتمالات إصابتها هي على الترتيب

0,1 ؛ 0,2 ؛ 0,4 أحسب احتمال الحوادث التالية :

D : يصيب المنطقة I 3 مرات

E : كل رمية تصيب منطقة واحدة من بين المناطق الثلاثة

(III) يقوم اللاعب برمية واحدة فقط نرفق بكل رمية العلامة 10 إذا أصاب المنطقة I و العلامة 7 إذا أصاب المنطقة II

و العلامة 5 إذا أصاب المنطقة III و العلامة 0 إذا كانت الإصابة خارج المناطق الثلاث

ليكن f المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العلامة المحصل عليها .

عين قانون احتمال المتغير f ثم أمله الرياضياتي E(f)

الحل - 9

(I) نرسم جدول الرميات الثلاثة حيث نرسم بـ $\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا أصاب الهدف .} \\ 0 \text{ إذا لم يصب الهدف .} \end{array} \right\}$

إذن : الحالات الممكنة هي كمايلي :

ملاحظة : احتمال أن لا يصيب الهدف هو $1 - 0,7 = 0,3$

الاحتمال	الحادثة	الرمية الثالثة	الرمية الثانية	الرمية الأولى
$0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,027$	a	0	0	0
$0,3 \times 0,3 \times 0,7 = 0,063$	b	1	0	
$0,3 \times 0,7 \times 0,3 = 0,063$	c	0	1	
$0,3 \times 0,7 \times 0,7 = 0,147$	d	1	1	
$0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,063$	e	0	0	1
$0,7 \times 0,3 \times 0,7 = 0,147$	f	1	0	
$0,7 \times 0,7 \times 0,3 = 0,147$	g	0	1	
$0,7 \times 0,7 \times 0,7 = 0,343$	h	1	1	

نتيجة :

$$P(A) = 0,343$$

الحالات الموافقة للحادثة A هي {h} منه

$$P(B) = 3 \times 0,147 = 0,441$$

الحالات الموافقة للحادثة B هي {g ؛ f ؛ d} منه

$$P(C) = 1 - 0,027 = 0,973$$

الحالات الموافقة للحادثة C هي {h ؛ g ؛ f ؛ e ؛ d ؛ c ؛ b} منه

$$P(D) = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,001$$

(II)

$$P(E) = 6 \times (0,1 \times 0,2 \times 0,4) = 0,024$$

تفسير : يوجد 6 حالات يصيب فيها المناطق الثلاث حسب ترتيب الرميات كمايلي

III II I ؛ III I II ؛ II III I

(III) قانون المتغير العشوائي f :

f_i	10	7	5	0
$P(f = f_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

$$E(f) = 10(0,1) + 7(0,2) + 5(0,4) + 0 = 1 + 1,4 + 2 = 4,4$$

التمرين 10 -

في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم المحصل عليه زوجي سمح له برمية أخرى . تنتهي اللعبة إجباريا بعد 10 رميات أو بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا

1 - ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الأولى

2 - ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية

3 - إذا أراد اللاعب أن يكون احتمال حصوله على رقم فردي أكبر من 0,03 فما هو عدد الرميات التي لا ينبغي تجاوزها

الحل - 10

1 - في الرمية الأولى ، احتمال الحصول على رقم فردي هو $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (3 أرقام فردية من بين 6)

2 - حتى تكون هناك رمية ثانية يجب أن تكون نتيجة الرمية الأولى هي رقم زوجي

إذن : احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية هو $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3 - تعميم : للحصول على رقم فردي في الرمية n يجب أن يتحصل اللاعب في كل من الرميات السابقة من 1 إلى (n-1) على رقم زوجي

منه : احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية n هو $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$

نتيجة : حتى يكون احتمال الحصول على رقم فردي أكبر من 0,03 يلزم و يكفي

أن يكون : $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,03$

أي : $\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] > \ln(0,03)$

أي : $n \ln\left(\frac{1}{2}\right) > \ln(0,03)$

أي : $-n \ln 2 > \ln 0,03$

أي : $n < \frac{\ln 0,03}{-\ln 2}$

أي : $n < 5,05$

منه : ينبغي للاعب أن لا يتجاوز 5 رميات

التمرين - 11

في دراسة خاصة لحالة سيارات مدينة معينة تبين أن : 12 % من السيارات ذات مكابح ضعيفة من بين السيارات ذات المكابح الضعيفة هناك 20 % منها لها إضاءة ضعيفة من بين السيارات ذات المكابح القوية هناك 8 % منها لها إضاءة ضعيفة سلامة الطرقات طلب من شرطة مرور هذه المدينة تكثيف مراقبة السيارات تكن الحوادث التالية :

L : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها إضاءة قوية و $\bar{L}$ حادثتها العكسية
F : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها مكابح قوية و $\bar{F}$ حادثتها العكسية

1 - أحسب $P_F(\bar{L})$ ؛ $P_L(\bar{L})$ ؛ $P(F)$

2 - أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح ضعيفة و إضاءة ضعيفة أيضا

3 - أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح قوية و إضاءة ضعيفة أيضا

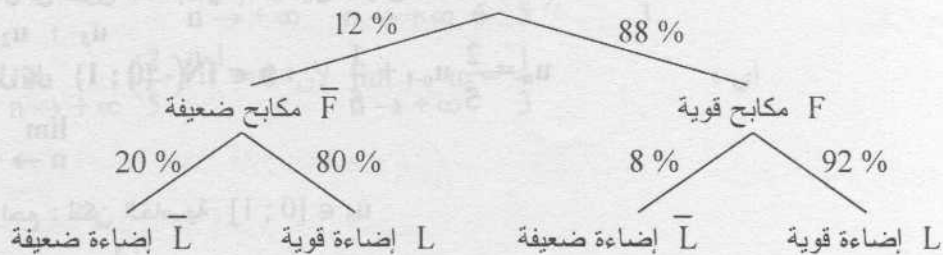
4 - استنتج احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات إضاءة ضعيفة

5 - علما أن السيارة المراقبة لها إضاءة ضعيفة ما هو احتمال أن تكون ذات مكابح ضعيفة

6 - برهن أن احتمال توقيف سيارة في حالة جيدة (مكابح قوية و إضاءة قوية) هو 0,8096

الحل - 11

لنمثل هذه النسب المئوية على شكل شجرة كاميلي :



منه النتائج التالية :

$$P(F) = 88\% = \frac{88}{100} = 0,88$$

$$P_F(\bar{L}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{L})}{P(\bar{F})} = \frac{\frac{12}{100} \times \frac{20}{100}}{\frac{12}{100}} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$P_F(\bar{L}) = \frac{P(\bar{L} \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{88}{100} \times \frac{8}{100}}{\frac{88}{100}} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

$$P(\bar{F} \cap \bar{L}) = \frac{12}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{3}{25} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{125}$$

$$P(F \cap \bar{L}) = \frac{88}{100} \times \frac{8}{100} = \frac{22}{25} \times \frac{2}{25} = \frac{44}{625}$$

$$P(\bar{L}) = P(F \cap \bar{L}) + P(\bar{F} \cap \bar{L}) = \frac{3}{125} + \frac{44}{625} = \frac{15 + 44}{625} = \frac{59}{625}$$

$$P_L(\bar{F}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{\frac{3}{125}}{\frac{59}{625}} = \frac{3}{125} \times \frac{625}{59} = \frac{15}{59}$$

$$P(F \cap L) = \frac{88}{100} \times \frac{92}{100} = \frac{8096}{10000} = 0,8096$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \\ u_n &= \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \text{ التمرين 12 - } (I) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ } n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$$

1 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \in [0; 1]$ 2 - (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $v_n = u_n - \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية3 - أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج أن u_n متقاربة و عين نهايتها

(II) A و B كيسان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :

الكيس A : 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

الكيس B : 8 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

نختار عشوائيا كيسا واحدا و نسحب منه كرة واحدة ثم نعيدها إلى نفس الكيس

إذا كانت هذه الكرة بيضاء نسحب مرة أخرى من نفس الكيس أما إذا كانت سوداء فنسحب من الكيس الآخر و نعيد هذه

التجربة n مرة .ليكن u_n احتمال أن تكون السحبة رقم n من الكيس A1 - أحسب u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 2 - برهن أن من أجل كل $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$: $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$ 3 - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الحل - 12

(I) البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية $u_n \in [0; 1]$ من أجل $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{2}$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

من أجل $n = 2$: $u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن $u_n \in [0; 1]$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} \in [0; 1]$ ؟

حسب فرضية التراجع : $u_n \in [0; 1]$ يكافئ

$$0 \leq u_n \leq 1$$

يكافئ

$$0 \leq \frac{2}{5}u_n \leq \frac{2}{5}$$

يكافئ

$$\frac{1}{5} \leq \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$$

يكافئ

$$\frac{1}{5} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{5}$$

و خاصة

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \in [0; 1]$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$$

- 2

$$= \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - \alpha$$

$$= \frac{2}{5}(u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha)$$

نتيجة : تكون (v_n) هندسية إذا و فقط إذا كان $v_n = u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha$

$$u_n - \alpha = u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha \quad \text{أي}$$

$$-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha \quad \text{منه :}$$

$$\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = 1/3 \quad \text{منه :}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{منه} \quad v_n = u_n - \frac{1}{3} \quad \text{أخيرا}$$

خلاصة : (v_n) متتالية هندسية أساسها $2/5$ و حدها الأول $1/6$

$$v_n = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \quad \text{إذن :}$$

$$v_n = u_n - \frac{1}{3} \quad \text{3 - لدينا : منه}$$

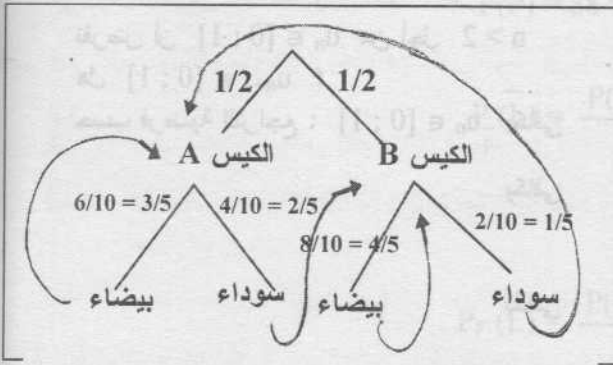
$$u_n = v_n + \frac{1}{3}$$

$$v_n = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \quad \text{منه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3} \quad \text{أي :}$$

(II) لنمثل شجرة السحب كما يلي :



$$u_1 = \frac{1}{2}$$

- 1

$$u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$u_3 = u_2 \times \frac{6}{10} + (1 - u_2) \times \frac{2}{10}$$

$$= \frac{3}{5} u_2 - \frac{1}{5} u_2 + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{2}{5} u_2 + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4+5}{25}$$

$$= \frac{9}{25}$$

 $u_n - 2$ هو احتمال السحب من الكيس A في السحبة رقم nالبرهان بالتراجع : لتكن الخاصية $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$ من أجل $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ من أجل $n = 2$ لدينا $u_2 = \frac{2}{5}$

$$\frac{2}{5} u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{و}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 2$ نفرض أن $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$ من أجل $n > 2$ هل $u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5}$ ؟

نميز حالتين كمايلي :

السحب رقم n من الكيس A : إذن : احتمال أن يكون السحب (n+1) في الكيس A هو $\frac{6}{10} u_n = \frac{3}{5} u_n$

السحب رقم n من الكيس B : إذن : احتمال أن يكون السحب (n+1) في الكيس A هو $\frac{2}{10} (1 - u_n) = \frac{1}{5} (1 - u_n)$

$$u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n + \frac{1}{5} (1 - u_n) \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{3}{5} u_n - \frac{1}{5} u_n + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5} \quad \text{منه الخاصية صحيحة من أجل } n+1$$

خلاصة : من أجل كل $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$: $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1/3 \quad \text{— 3 (حسب السؤال (3) من الجزء I)}$$

لأن (u_n) هي المتتالية المعرفة في الجزء I من التمرين .

التمرين - 13

A و B لاعبان يتباريان في اللعبة التالية :
في البداية يدفع كل من اللاعبين مبلغ 1 DA و يرمي كل منهما قطعة نقدية غير مزيفة تحتوي على وجه F و ظهر P
إذا حصل A على الوجه و B على الظهر تتوقف اللعبة بفوز A الذي يأخذ المبلغ المدفوع (1 + 1)
إذا حصل A على الظهر و B على الوجه تتوقف اللعبة بفوز B الذي يأخذ المبلغ المدفوع (1 + 1)
في الحالات الأخرى يعتبر تعادلا و عليه يدفع اللاعبان مبلغ 1 DA ثم يبدأ من جديد رمي القطعة النقدية و هكذا تستمر
اللعبة حتى يفوز أحد اللاعبين أو يحدث التعادل في المرة العشرين حيث كل لاعب يستعيد المبلغ الذي دفعه
من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \leq n \leq 20$ نعرف الحوادث التالية :

A_n : اللعبة تنتهي في المحاولة n بفوز A

B_n : اللعبة تنتهي في المحاولة n بفوز B

I_n : المحاولة n هي تعادل

نضع $Z_n = P(I_n)$; $Y_n = P(B_n)$; $X_n = P(A_n)$

1 - أحسب Z_1 , Y_1 , X_1

2 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \leq n \leq 19$:

$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} &= \frac{1}{2} Z_n \end{aligned} \right\}$$

3 - استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \leq n \leq 20$:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Y_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Z_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned} \right\}$$

4 - ليكن T المتغير العشوائي الذي يعبر عن مبلغ اللعب أثناء المحاولة التي تنهي اللعبة أي المبلغ الذي يحصل عليه الفائز
أو المبلغ الذي يتقاسمه اللاعبان في حالة انتهاء اللعبة بتعادل .

إذا توقفت اللعبة في المحاولة k يكون عندها $T = 2k$

1 - ما هي أكبر قيمة ممكنة لـ T ؟

2 - أحسب $P(T = 40)$

3 - أحسب $P(T = 2k)$ بدلالة k حيث k عدد طبيعي و $1 \leq k \leq 19$ ثم عين قانون احتمال المتغير T

الحل - 13

1 - عند رمي اللاعبين A و B القطعة النقدية لدينا النتائج الممكنة كمايلي :

A	B	التفسير	الاحتمال
F	F	تعادل	1/4
F	P	فوز A	1/4
P	F	فوز B	1/4
P	P	تعادل	1/4

$$X_1 = P(A_1) = \frac{1}{4}$$

منه النتائج التالية :

$$Y_1 = P(B_1) = \frac{1}{4}$$

$$Z_1 = P(I_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(حالتين للتعادل حسب الجدول)

$$2 - \text{ لتكن الخاصية : } \left. \begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} &= \frac{1}{2} Z_n \end{aligned} \right\} \text{ من أجل } 1 \leq n \leq 19$$

البرهان بالتراجع :

$$\text{لدينا : } \left\{ \begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{4} P(I_1) \\ Y_2 &= \frac{1}{4} P(I_1) \\ Z_2 &= \frac{1}{2} P(I_1) \end{aligned} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{4} Z_1 \\ Y_2 &= \frac{1}{4} Z_1 \\ Z_2 &= \frac{1}{2} Z_1 \end{aligned} \right.$$

منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

$$\text{نفرض أن } X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \text{ و } Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \text{ و } Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n \text{ من أجل } 1 \leq n \leq 18$$

$$\text{هل } X_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1} \text{ ؛ } Y_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1} \text{ ؛ } Z_{n+2} = \frac{1}{2} Z_{n+1} \text{ ؟}$$

$$\text{لدينا : } \left\{ \begin{aligned} X_{n+2} &= \frac{1}{4} P(I_{n+1}) \\ Y_{n+2} &= \frac{1}{4} P(I_{n+1}) \\ Z_{n+2} &= \frac{1}{2} P(I_{n+1}) \end{aligned} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{aligned} X_{n+2} &= \frac{1}{4} Z_{n+1} \\ Y_{n+2} &= \frac{1}{4} Z_{n+1} \\ Z_{n+2} &= \frac{1}{2} Z_{n+1} \end{aligned} \right.$$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

$$\text{نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } 1 \leq n \leq 19 \left\{ \begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} &= \frac{1}{2} Z_n \end{aligned} \right.$$

$$3 - Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n \text{ إذن : } (Z_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } 1/2 \text{ و حدها الأول } Z_1 = 1/2 \text{ منه } Z_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{أي } Z_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\text{نتيجة : } \left\{ \begin{aligned} X_n &= \frac{1}{4} Z_{n-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \\ Y_n &= \frac{1}{4} Z_{n-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \end{aligned} \right.$$

(II) 1 - يكون T أكبر ما يمكن إذا و فقط إذا انتهت اللعبة بالتعادل بعد 20 محاولة أي $k = 20$ منه $T = 40$

2 - يكون $T = 40$ (قيمة عظمى) إذا و فقط إذا كانت نتيجة الرمية 19 هو تعادل أي $P(T = 40) = Z_{19} = \left(\frac{1}{2} \right)^{19}$

3 - من أجل $1 \leq k \leq 19$ يكون $T = 2k$ إذا و فقط إذا كانت اللعبة قد انتهت بعد k محاولة

أي إما فوز A أو فوز B

$$P(T = 2k) = X_k + Y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k : \text{منه}$$

نتيجة : القيم الممكنة لـ T هي 2 ; 4 ; 6 ; ; 2k ; 38 ; 40
منه قانون الاحتمال للمتغير العشوائي T هو كمايلي :

T_i	2	4	6		2k		38	40
$P(T = T_i)$	1/2	$(1/2)^2$	$(1/2)^3$		$(1/2)^k$		$(1/2)^{19}$	$(1/2)^{19}$

تحقيق :

حتى تكون هذه النتائج صحيحة يلزم و يكفي أن يكون المجموع

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \text{ يساوي } 1$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right) \text{ لدينا :}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 1 : \text{منه}$$

حذار ! $P(T = 40)$ هو احتمال أن يكون التعادل في الرمية 19 مهما كانت النتيجة في الرمية 20

التمرين - 14

عشرة قريصات مرقمة من 1 إلى 10 . نسحب منها 3 قريصات في آن واحد
هل عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم زوجي واحد على الأقل هو :

- (a) 180 (b) 330 (c) 110

الحل - 14

عدد الأرقام الزوجية هو 5 و هي {2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10}

الحصول على رقم زوجي على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة كل الأرقام فردية منه عدد الحالات الممكنة هو

$$C_{10}^3 - C_5^3 = 120 - 10 = 110$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (c) 110

التمرين - 15

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث :

$$P(A \cup B) = 0,35 ; P(B) = 0,5 ; P(A) = 0,4$$

هل قيمة الاحتمال $P(A \cap B)$ هي :

- (a) 0,1 (b) 0,25 (c) المعطيات غير كافية للجواب

الحل - 15

$$0,35 = 1 - P(A \cup B) : \text{منه } P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = 1 - 0,35 \text{ أي :}$$

$$P(A \cup B) = 0,65 \text{ أي :}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ من جهة أخرى :}$$

$$0,65 = 0,4 + 0,5 - P(A \cap B) \text{ أي :}$$

$$P(A \cap B) = 0,9 - 0,65 \text{ منه :}$$

$$P(A \cap B) = 0,25 \text{ أي :}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (b) 0,25

التمرين - 16

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث $P(A \cap B) = 1/6$ و $P_A(B) = 1/4$ هل $P(A)$ يساوي :

(a) $2/3$ (b) $1/24$ (c) $1/12$

الحل - 16

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{منه :} \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)}$$

$$P(A) = \frac{1/6}{1/4} \quad \text{أي}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{1} \quad \text{أي}$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \text{أي}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (a) $2/3$

التمرين - 17

X متغير عشوائي قانون احتماله كمايلي :

X_i	1	2	4
$P(X = X_i)$	1/2	1/4	1/4

هل الانحراف المعياري لـ X هو : (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (c) 2

الحل - 17

$$E(X) = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{1}{4}(2-2)^2 + \frac{1}{4}(4-2)^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$